

Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / *El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6–12 años) en Estados Unidos*

David W. Carraher & Analúcia D. Schliemann

To cite this article: David W. Carraher & Analúcia D. Schliemann (2019): Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / *El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6–12 años) en Estados Unidos*, *Infancia y Aprendizaje*, DOI: [10.1080/02103702.2019.1638570](https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570>



Published online: 08 Aug 2019.



Submit your article to this journal 



CrossMark

View Crossmark data 



Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / *El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6–12 años) en Estados Unidos*

David W. Carraher^b and Analúcia D. Schliemann^a

^aTERC; ^bTufts University

(Received 18 February 2019; accepted 23 May 2019)

Abstract: We relate studies of algebraic thinking in elementary school (grades K–5, ages five to 10) to current mathematics standards in the United States. Classroom research increasingly paints a promising picture of the potential of young students to learn to think algebraically. This confirms the overall judgment behind recommendations to create a K–12 algebra strand (for ages five to 17) but leaves a host of challenges regarding the implementation of algebraic thinking activities in classrooms and, more generally, to the preparation of teachers.

Keywords: algebraic thinking; early algebra; functions; relations; standards for mathematics education

Resumen: En este artículo relacionamos diversos estudios sobre el pensamiento algebraico en la escuela primaria (K–5, entre cinco y 10 años) con los estándares matemáticos actuales en Estados Unidos. La investigación en el aula dibuja un panorama cada vez más prometedor del potencial de los más jóvenes para aprender a pensar algebraicamente. Esto confirma el consenso general que se encuentra tras la recomendación de crear un itinerario de álgebra para K–12 (equivalente a Educación Primaria y Secundaria, de cinco a 17 años) pero plantea una serie de retos en lo que respecta a la ejecución de las actividades de pensamiento algebraico en el aula y, en general, sobre la formación del profesorado.

Palabras clave: álgebra temprana; estándares para la enseñanza de las matemáticas; funciones; pensamiento algebraico; relaciones

Overview

We thank the editors of *Infancia y Aprendizaje* for the opportunity to set research on early algebraic thinking against the backdrop of current mathematics standards in

English version: pp. 1–19 / *Versión en español:* pp. 20–40

References / *Referencias:* pp. 40–44

Translated from English / *Traducción del inglés:* Mercè Rius

Authors' Address / *Correspondencia con los autores:* Analúcia D. Schliemann, Tufts University, 34 Fosters Pond Rd, Andover, MA 01810. E-mail: aschliemann@mac.com

the United States (US). The present ideas come from our experience as researchers, teachers and, more recently, teacher educators in the US and Brazil and in our admittedly limited backgrounds in mathematics and in educational policy.

In what follows, we shall address the following issues, each corresponding to a section of the paper:

- Why a K–12 algebra strand?
- The mathematics standards for algebra in elementary school.
- Algebraic thinking without algebraic notation.
- Algebraic thinking through patterns, functions and relations.
- Functions approaches to algebra in US elementary schools: impact on teachers and students.

In the concluding section, we highlight a discrepancy between how the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) and the Common Core State Standards Initiative (CCSSI) standards envision the K–12 algebra strand and close by considering changes likely to be needed in teacher preparation for elementary teachers to implement a K–12 algebra strand.

Why a K–12 algebra strand?

During the 1990s, the idea of a longitudinal algebra strand throughout grades K–12 was widely discussed across the US mathematics education community. One important forum was the US Department of Education’s 1993 Algebra Initiative Colloquium (LaCampagne, Blair, & Kaput, 1995), which brought together 51 algebra teachers, mathematics education researchers, algebraists and representatives of federal agencies to engage in dialogue about America’s ‘algebra problem’. ‘The algebra problem’ reflected an increasing awareness that ‘Algebra I’, a first-year course in algebra often taken in grade 9, has acted as a ‘gatekeeper’ to advanced courses and future careers in science and mathematics. Most colloquium participants realized, and research had found, that (1) many students taking their first algebra course in adolescence displayed serious difficulties and (2) these difficulties likely stemmed from how mathematics was taught in the early grades. Here we focus on the latter finding.

At the same colloquium, Kaput (1995), grounding his proposal for an algebra strand in Steen’s (1990) notion of ‘vertical continuity’, envisioned algebra as a strand flowing throughout the K–12 curriculum

... where major ideas weave through many grade levels, frequently interweaving with one another to create a rich fabric, but one that has a direction, a natural flow, from the wide watershed of concrete experience to generalizations and abstractions, from informal and language-based representations to more formal representations. (p. 35)

In recent decades, reform initiatives have embraced the general idea of a K–12 algebra strand

... whereby students have long-term, sustained algebra experiences in school mathematics, beginning in the elementary grades, that build their natural, informal intuitions about patterns and relationships into formalized ways of mathematical thinking (e.g., National Governors Association Center for Best Practices [NGA] & Council of Chief State School Officers [CCSSO], 2010; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000, 2006). (Blanton, Stephens, Knuth, Gardiner, Isler, & Kim, 2015, p. 40)

It may seem unusual to consider algebra in elementary school, given adolescents' difficulties in algebra courses. However, early algebra is not the same as algebra early (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008). Moreover, recent research from various perspectives provides evidence regarding how early algebraic thinking can be successfully introduced in elementary school (e.g., Cai & Knuth, 2011; Kaput, Carraher, & Blanton, 2008; Kieran, 2018).

The mathematics standards for algebra in elementary school

Since the Algebra Initiative Colloquium, the standards for mathematics education by the NCTM (2000) and, a decade later, the CCSSI [Common Core State Standards Initiative] (2010) have included topics and recommendations on an algebra strand beginning at the early grades. The standards were intended to have an impact on curriculum requirements, textbooks, teacher preparation and student assessments.

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] (2000) envisioned algebra in the early grades as a way for teachers to help students build a foundation for learning algebra in middle and high school and suggested that 'systematic experience with patterns can build up to an understanding of the idea of function' (p. 37)

Treating algebra as a vertical strand through the K–12 curriculum breaks with tradition in US education, according to which algebra only officially appears around adolescence, in late middle school or high school (NCTM, 2000). By viewing elementary algebra and arithmetic as closely interrelated from the outset, the K–12 algebra strand perspective also differs from 'pre-algebra' programmes transitioning between arithmetic and algebra.

NCTM's algebraic expectations for grades Pre-K to 5 are organized around four clusters according to which students from four to 10 years of age are to: (1) understand patterns, relations and functions; (2) represent and analyse mathematical situations and structures using algebraic symbols; (3) use mathematical models to represent and understand quantitative relationships; and (4) analyse change in various contexts.

In the earliest grades, students would engage with algebra without formal notation. For instance, in Pre-K to 2, students would

illustrate general principles and properties of operations, such as commutativity, using specific numbers [and] use concrete, pictorial, and verbal representations to develop an understanding of invented and conventional symbolic notations. (NCTM, 2000, p. 90)

In grades 3 to 5, students are to

identify such properties as commutativity, associativity, and distributivity and use them to compute with whole numbers; represent the idea of a variable as an unknown quantity using a letter or a symbol; express mathematical relationships using equations; model problem situations with objects and use representations such as graphs, tables, and equations to draw conclusions; investigate how a change in one variable relates to a change in a second variable; identify and describe situations with constant or varying rates of change and compare them. (NCTM, 2000, p. 90)

CCSSI (2010), on the other hand (see Table 1), envisions the algebra strand as an ‘operations and algebraic thinking domain’ starting from Kindergarten, with recommended proficiencies for each grade.

Although both the NCTM and CCSSI standards call for ‘algebraic thinking’ among students from early on, the NCTM standards are more clearly related to algebra than the CCSSI standards.

Table 1. CCSSI’s proficiencies regarding operations and algebraic thinking.

Grade level	Proficiencies
Kindergarten	Understand addition as putting together and adding to, and understand subtraction as taking apart and taking from.
Grade 1	Represent and solve problems involving addition and subtraction. Understand and apply properties of operations and the relationship between addition and subtraction. Add and subtract within 20. Work with addition and subtraction equations.
Grade 2	Represent and solve problems involving addition and subtraction. Add and subtract within 20. Work with equal groups of objects to gain foundations for multiplication.
Grade 3	Represent and solve problems involving multiplication and division. Understand properties of multiplication and the relationship between multiplication and division. Multiply and divide within 100. Solve problems involving the four operations, and identify and explain patterns in arithmetic.
Grade 4	Use the four operations with whole numbers to solve problems. Gain familiarity with factors and multiples. Generate and analyse patterns.
Grade 5	Write and interpret numerical expressions. Analyse patterns and relationships.

NCTM (2000) recommends that, in grades K–2, students learn to ‘recognize, describe, and extend patterns such as sequences of sounds and shapes or simple numeric patterns and translate from one representation to another [and] analyse how both repeating and growing patterns are generated (p. 90)’, and acknowledges that patterns encountered in grades K–2 are related to sequences, functions and relations. In grades 3–5, NCTM recommends that students use multiple representations for patterns and functions, conceive of a variable as standing for an arbitrary member of a domain, represent relationships among quantities with equations and consider co-variation and (constant or varying) rates of change.

CCSSI (2010) recommends that, from grade 3, students learn to ‘identify arithmetic patterns (including patterns in addition or multiplication tables) and explain them using properties of operations’. At grade 4, students are expected to be able to generate a number or shape pattern from a given rule and identify features of the pattern not explicit in the rule. At grade 5 students are expected to ‘generate two numerical patterns using two given rules, [i]identify apparent relationships between corresponding terms, form ordered pairs consisting of corresponding terms from the two patterns, and graph the ordered pairs on a coordinate plane’.

CCSSI anticipates the introduction of conventional algebraic notation only at grade 6. Unlike NCTM, it introduces functions in a content standard in grade 8. These delays seem ill-advised given that: (1) teachers are more likely to successfully promote students’ algebraic thinking in early grades if they are aware of how patterns relate to functions and relations; (2) the operations of arithmetic present many opportunities for working with functions; and (3) as detailed later in this paper, research has shown that young students can develop a solid basic understanding of simple functions and even express them using conventional algebraic notation. Introducing variables relatively late and principally in the context of solving equations also offers a restricted view of a variable as a specific unknown (Schoenfeld & Arcavi, 1988).

Algebraic thinking without algebraic notation

What is algebra?

In common parlance, ‘algebra’ sometimes refers to rules and procedures for the manipulation of equations containing letters representing variables: ‘... for example, the question, “What is 3×7 ?” will be thought of as belonging to arithmetic, while the question “If $x + y = 10$ and $xy = 21$, then what is the value of the larger of x and y ? ” will be regarded as part of algebra’ (Gowers, 2008, p. 1).

NCTM’s Task Force on Algebra offers us a more useful definition of algebra as the ‘... study of patterns/relationships and functions which uses a variety of representations including verbal, tabular, graphical, and symbolic (Schoenfeld, 1995, p. 11)’. This definition acknowledges that algebra can take on representational forms other than algebraic notation.

We adopt NCTM Task Force's definition of algebra, with the proviso that 'relationship' is understood as standing for 'relation', a term of art in mathematics.

It is worth noting that mathematicians of antiquity effectively 'solved equations' for unknowns using natural language and/or geometric diagrams (Katz, 1995). As we shall see, there is now considerable evidence that students can learn to make mathematical generalizations before they have learned algebraic notation.

In mathematics education, there is no consensus about the terms 'symbolic' and 'algebraic'. NCTM treats as symbolic those generalizations that are expressed through conventional algebraic notation. Radford (2018) appears to adopt this view of 'symbolic' by referring to mathematical generalization without conventional algebraic notation as 'non-symbolic algebra'. Balacheff (2001), however, employs 'symbolic' in the broad sense according to which natural language, tables and graphs are viewed as forms of symbolic representation insofar as they entail symbols (words, numerals, graphs), but regards what we would call 'algebraic thinking' as 'symbolic arithmetic'.

Algebraic thinking and implicit variables

Kieran's definition provides a useful point of departure for discussing algebraic thinking:

Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any letter-symbolic algebra at all, such as, analysing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting. (Kieran, 2004, p. 149)

Her definition points to various sorts of activities where algebraic thinking is likely to occur. We would add that algebraic thinking also generally entails thinking about variables, possibly in implicit form.

Fujii and Stephens (2001) illustrate one kind of implicit variable in their analysis of 'generalisable numerical expressions', where numbers serve as *quasi-variables*. They refer to Carpenter and Levi's (1999) account of students discussing the equation $78 - 49 + 49 = 78$. The students appeared to understand that the specific numbers were not important. A student who believes that 'it doesn't matter what numbers you use' effectively regards the numbers as variables, that is, arbitrary elements from a set of possible numbers. Expressed more formally, we might say that numbers, a , b , could be replaced by any numbers as long as the underlying algebraic structure, $a - b + b = a$, is kept intact.

The NCTM standards allude to quasi-variables in their coverage of the expectation that students in grades pre-K to 2 should be able to 'illustrate general principles and properties of operations, such as commutativity, using specific numbers' (NCTM, 2000, p. 90). A student who claims that $8 + 5$ equals $5 + 8$

may be expressing the generalization that we might formalize as $a + b = b + a$ and relate to the commutative property of addition. A similar analysis could be offered for each of the field axioms.

Implicit variables often arise in natural language. One might describe a person's amount relative to another's by saying, 'Mary has three more candies than John', even though neither John's nor Mary's total is known (Brizuela, 2016; Carraher et al., 2008). Such a statement is but a short step away from the expression 'John's amount plus three more candies' and from $n + 3$, where n represents John's amount. This, in turn, is a short step from the relation, $m = n + 3$, where m represents Mary's amount; the same relation is represented by $m - 3 = n$ and $m - n = 3$.

Variables, whether implicit or explicit, often lie embedded in mathematical objects such as functions or equations. For instance, a variable may appear in: '(1) a formula, (2) an equation (or open sentence) to solve, (3) an identity, (4) a property, and (5) an equation of a function of direct variation (not to be solved)' (Usiskin, 1988, p. 7). Variables can, of course, also appear in simple expressions such as $x + 3$.

A half-century ago, Davydov (1969/1991) showed that, from six or seven years of age, students can learn to set up and derive inferences from simple equations or inequalities using rectangular strips, letter symbols and other forms of representation for an indeterminate, presumably fixed value of a quantity in a word problem. Work in Davydov's tradition (Bodanskii¹, 1969/1991; Dougherty, 2008; Schmittau, 2005) shows that young children can learn to work with placeholders for indeterminate quantities before they master addition and subtraction. For example, given rods with the lengths designated as A , B , such that A is longer than B , they can reason that there must exist some third rod (i.e., third length), C , such that $B + C = A$. They can further learn to express, in their own words and in formal notation, that $B = A - C$ and $C = A - B$. In essence they appreciate that each of the equations expresses the same relation among the quantities A , B and C . This is confirmed by noting that each equation can be represented using a three-column table with headers ' A ', ' B ' and ' C ' and the same triples, (A, B, C) .

Carpenter and Levi (1999) found that elementary school children evince implicit algebraic reasoning, generalizations and justifications, discuss the truth or falsity of number sentences and think about structural relations among the numbers as placeholders or as variables.

Our studies and those by Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, and Newman-Owens (2015) and by Blanton, Stephens, et al. (2015) have engaged students in algebraic thinking and generalizations about structural relations as they focused on variables and functional relations, particularly those involving sets of numbers or quantities.

Just as algebraic thinking emerged before modern algebraic notation (Boyer, 1968), functions emerged before use of the term *function* and before interpretations of a function as a geometric object associated with a curve, as a quantity varying along with another and as a relation associating each element of a domain with a single element of a co-domain (Kleiner, 1989).

When one takes to heart the notion that ‘[t]he function is an operator or operation which, applied to a number (or other object), yields a number (or other object)’ (Quine, 1987, p. 72), the operations of arithmetic themselves can be considered functions (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2000; Carraher et al., 2008). This insight helps ‘bring out the algebraic character of arithmetic’ (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007)² and support the idea of variables as placeholders for arbitrary members of sets. Functions are at once abstract and amenable to multiple forms of representation, and they can serve to model physical phenomena. Because equations can often be fruitfully interpreted as the comparison of two functions (Schwartz & Yerushalmy, 1992) and functions can be represented through non-algebraic forms, opportunities arise for students to work with relations corresponding to equations before they have mastered algebraic notation (see the discussion of The Wallet Problem further ahead).

Algebraic thinking through patterns, functions and relations

Patterns are associated with a wide variety of contexts: dance, music, textiles, fingerprints, poetic rhyming schemes, coding, detective stories, airline trajectories, architectural styles, spreadsheets and, of course, mathematics. Mathematics is even occasionally regarded as ‘the science of patterns’ (Resnick, 1981; Steen, 1988). However, ‘pattern’ is not a term of art in mathematics. Although both NCTM and the CCSSI emphasize the importance of patterns for building an algebraic strand in the early grades, they leave the term undefined.

Sometimes a pattern corresponds to an *isolated property*. For instance, we might express the idea that a function ‘increases monotonically’ by noticing a pattern by which the values of the function never decrease as the independent variable increases. A function may be monotonic, but there are infinitely many monotonic functions.

Some patterns, together with some assumptions, convey a *defining property of a sequence or function*, provided that the domain and co-domain are agreed upon. In the case of a sequence, the means by which an item is determined by its predecessor must be unambiguous and, in the case of a function, it should be possible, in principle, to generate all ordered pairs from an analysis of the pattern.

Consider the pattern in Figure 1. Let us assume that, after any item, each subsequent item is made by creating a replica of that item and adjoining, at the base of the item, a horizontal line of dots containing one more dot than the current base line of dots, such that an equilateral triangular form is imparted to the new collection. Normally, in an elementary school setting, it will not be necessary to state such an assumption explicitly: students will easily infer it, or something equivalent, by scanning the first few items and seeing how the next item is constructed from the preceding one.

Figure 2 displays the fifth item in the sequence, made in the same way items 2 to 4 were presumably made from their respective predecessors.

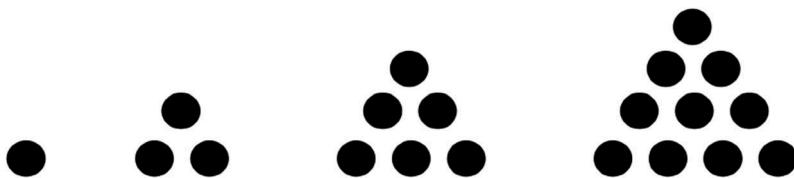


Figure 1. A simple geometric pattern (c.f. Carraher & Schliemann, 2007).

Note: The example in Figure 1 embodies a figurate number sequence (Hobgood & Hitchings, 2019), the triangular numbers, corresponding to a quadratic function. It is unlikely that students will discover an algebraic representation for triangular numbers before they have mastered school algorithms for multiplication and become familiar with the use of letters to represent variables.

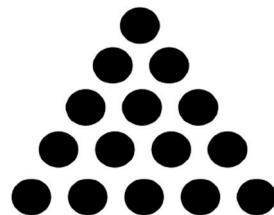


Figure 2. The next item in the sequence.

The NCTM and CCSSI mathematics standards appear to adopt both senses of ‘pattern’ (as an isolated property and as a uniquely defining property), and possibly several others³. For instance, the standards sometimes refer to patterns when mentioning structures or properties of number systems, such as base-10 and place-value structures. However, with respect to the transition from ‘patterns to sequences to functions’ that concerns us here, both groups appear to use ‘pattern’ to refer to an unambiguous, defining pattern.

The distinction between patterns and relations, including functions, deserves mention. The modern view of a binary relation is that of a correspondence between elements of two sets, a domain and a co-domain, each typically consisting of numbers, but possibly quantity values, geometric figures or any other specified class of things. (In the case of a function, each element of the domain is associated with a single element from the co-domain.) This bare-bones conception of a relation does not imply a pattern. Numbers distributed randomly to students in a classroom such that each student is associated with a number define a function from students to numbers even though there may be no discernible pattern (in the sense of a streamlined representation that accounts for all ordered pairs).

The fact that, according to the modern view, some relations exist without a pattern should be no cause for concern. The great majority of relations of

interest in early mathematics education exhibit patterns. In the eighteenth century, Euler defined a function as follows:

A function of a variable quantity is an analytical expression composed in any manner from that variable quantity and numbers or constant quantities. (cited in Kleiner, 1989, p. 284)

Present-day elementary mathematics educators can generally assume, as Euler did, that there is an underlying pattern. But, unlike Euler, they need to remember that functions can be represented using non-algebraic forms.

Let us now consider the simpler case of the arithmetic progression 1, 4, 7, 10 ... dots. Restricting one's attention to extending the pattern is, for us, to interpret the sequence as a function, tantamount to trying to determine $f(n + 1)$ from $f(n)$, where $f(n)$ represents the number of dots at step n .

Producing the next item is fairly straightforward, and, once the figure is available, one can easily count the dots. Coming up with a definitive description of the sequence requires much more effort. And there are two, fundamentally different, paths: through a recursive description or an explicit, non-recursive description.

Generating output from a given input using a valid recursive approach without backtracking requires starting at the initial value and iterating while keeping track of the position of any figure along the sequence (e.g., Earnest, 2014; Ferrara & Sinclair, 2016), until one reaches the position of the presumed input value. This entails knowing the step in the sequence to stop iterating. In the letter-notation form, it requires creating a variable designating the position in the sequence that will serve as the argument of the function.

In order to return the value of an arithmetic progression at position n , a *recursive representation* necessarily requires knowing: (1) the value at position 1 or initial value, $f(1) = c$; and (2) the fixed increment at each subsequent position, that is, $k = f(m + 1) - f(m)$. The value of the sequence at position p can then be computed as the initial value plus the increments from positions 1 to p . The recursive representation can be formally stated by the following pair of equations:

$$f(1) = c; f(p + 1) = f(p) + k;$$

A *non-recursive, explicit description*⁴ of an arithmetic progression directly expresses the relation between the position number and the value at the respective position. It corresponds to the formula

$$f(p) = c + (p - 1) \times k$$

where c corresponds to the initial value and k corresponds to the value of each increment.

We have found (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2001, 2007) that third-graders commonly complete function tables by iterating, first down one column, then down the next. This approach may make it difficult for students to find a non-recursive algebraic expression. Teachers can help students make such a leap by asking them to determine the output for some remote input (e.g., ‘at the 100th step’, or ‘when the input is 100’) or an arbitrary step (e.g., ‘using n as the input’, where n refers to any step other than 1) (see Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008).

For some readers the non-recursive, explicit expression of an arithmetic progression will evoke the idea of a linear function and its standard form, $y = mx + b$, commonly used for representing linear relations over the real numbers.

Young students finding functions in patterns

Ferrini-Mundi, Lappan, and Phillips (1997) describe how patterns can be diversely explored from Kindergarten to grade 6, using a situation (Figure 3) adapted from NCTM’s Algebra Working Group (1995).

Classroom transcripts revealed that, across the grades, teachers using this problem can help children move from counting tiles to expressing generalizations, considering how the number of blue tiles relates to the number of white tiles and representing the relationships using words, tiles, tables, graphs and algebra notation. Ferrini-Mundi and her colleagues suggest that after discussing pools of various sizes and representing them with tiles, students in grade 1 might be asked to relate the number of tiles in a square and the length of the square’s edge. In grade 2, they may begin to organize data into a table and use addition and multiplication. In grades 3–4, students may be asked to consider the number

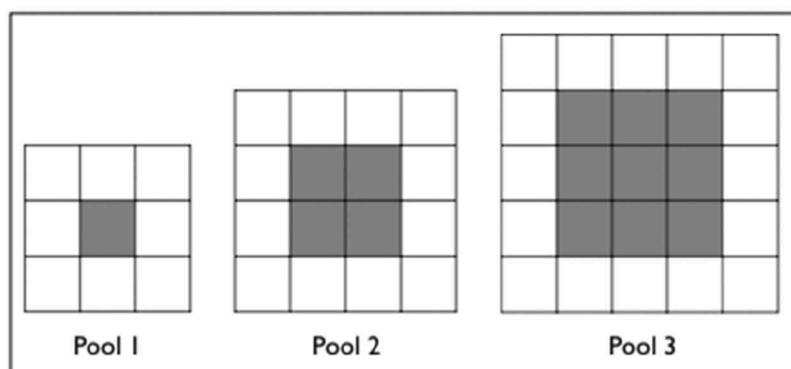


Figure 3. Swimming pools with borders.

Tat Ming is designing square swimming pools. Each pool has a square centre that is the area of the water. Tat Ming uses blue tiles to represent the water. Around each pool there is a border of white tiles. Here are pictures of the three smallest square pools that he can design with blue tiles for the interior and white tiles for the border.

of blue and white tiles for a pool of a given edge length and determine the number of border tiles *from the number of blue (bottom) tiles* and vice versa; while examining data tables they work with fractions and proportions involving the number of blue tiles, white tiles and the total number of tiles. In grades 5–6, a teacher might emphasize functions more explicitly as students use different representations for the relationship between number of tiles of each colour and total number of tiles. In doing so, from the early grades, students are not only learning core concepts of algebra and functions, but they can also develop a deeper understanding of arithmetic.

Textbooks, lesson plans and videos about patterns on the web are often limited to asking children to simply extend a geometric sequence or to calculate outputs given inputs and a formula. Such approaches fail to sufficiently exploit patterns.

Functions in early algebra interventions

In early mathematics instruction, the concept of function can enrich many arithmetic activities by prompting students to make generalizations and relate the tasks to abstract ideas and concepts. For example, multiplication by 3 can be construed as the mapping $n \rightarrow 3n$, which associates a set of input values to unique output values, corresponding to functional notation such as $f(x) = 3x$ and to its graph in the Cartesian plane.

Eventually, over the course of many years, students will be able to work with functions and other relations, given in the form of algebraic expressions, from which they derive new expressions.

Systematic studies in the US (e.g., Blanton, 2008; Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, & Newman-Owens, 2017; Brizuela, 2016; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens, & Murphy Gardiner, 2015; Cañadas, Brizuela, & Blanton, 2016; Carraher & Schliemann, 2007, 2016, 2018; Carraher et al., 2000; Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2005; Carraher et al., 2008; Martinez & Brizuela, 2006; Schliemann et al., 2007; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2012) have focused on algebra as the study of functions, relations and joint variation. These studies provide evidence that, starting from grade 1, students can successfully begin to explore functions and their representations.

In our research, over three longitudinal studies in schools with a large percentage of African-American and Hispanic-Latino students, we implemented more than 100 lessons in grades 2–5 classrooms (Brizuela, 2016; Brizuela & Ernest, 2008; Brizuela & Schliemann, 2004; Carraher et al., 2008; Carraher & Schliemann, 2007, 2016, 2018; Carraher et al., 2000, 2005; Carraher, Schliemann, Brizuela, & Ernest, 2006; Carraher et al., 2008; Schliemann et al., 2001, 2007; Schliemann et al., 2012). The lessons (see <http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/about.asp>) in grades 3 to 5 focused on functions and their representation through natural language, function tables, graphs and algebraic notation. Students discussed, provided generalizations and represented rich problem contexts and situations involving relations between sets of physical

quantities. Starting from their own initial representations, students gradually came to use number lines, data tables, graphs and letters to represent amounts. They discussed different representations of the same situation and established correspondences across them. Algebraic notation was introduced first to help them express what they had already learned about the problem. Over time, the notation allowed them to derive new information and insights. We also encouraged students to derive conclusions directly from tables, graphs or algebraic expressions and, ultimately, to produce and solve equations using algebraic procedures.

Carraher et al. (2008) describe in detail the implementation of two of our lessons: the Candy Boxes and the Wallet Problem lessons.

At the start of grade 3, the Candy Boxes lesson introduced eight-year-old students to variables and to co-variation between variables. The instructor begins by holding up two boxes of candies and affirming that: (1) one box is John's and all of John's candies are in that box; (2) the other box is Mary's, and Mary's candies include the candies in the box plus three additional candies atop the box; and (3) each box has exactly the same number of candies inside.

In four classrooms, 40 of the 63 students, 63.4%, initially assigned particular numbers to the amounts in the boxes.

While filling out a table of possible amounts of candies in a box and amounts John and Mary might have, the students were practising addition facts and dealing with inverse operations (while determining John's amount of candies from Mary's amount, or the amount in the box from the total amount John and Mary would have altogether). The data tables can be regarded as ordered pairs of the relation between amounts for John and Mary.

By the end of grade 4, the same students represented, analysed and discussed the Wallet Problem, which we might describe as a comparison between two functions, $w + 8$ and $3 \times w$. The lesson opened with the statements: (1) Mike had \$8 in his hand and the rest of his money is in his wallet; and (2) Robin had exactly three times as much money as Mike had in his wallet. The students were first asked to describe Mike's and Robin's amounts in their own words and then to represent the situation on paper with drawings or expressions.

Of the 63 students, 39 (61.9%) represented Mike's and Robin's amounts using a variable for the amount in the wallet (49.2% used letter notation such as $w + 8$ or $3 \times w$, and 12.7% used a picture of a wallet instead of a letter to represent the variable amount). Only eight students assigned a specific value to the amount in the wallet. These representations reflect the degree to which the students had appropriated algebraic syntax into their repertoire of mathematical tools.

They filled out tables listing possible values for Mike's and Robin's amounts in accordance with diverse values for w , the amount in the wallet. In examining their own tables of possible values, the students came to realize that: (1) Mike and Robin would have the same amount of money if there was \$4 in the wallet; (2) Mike would have more money if the wallet held less than \$4; and (3) Robin would have more than Mike if there was more than \$4 in the wallet. During the

whole-class discussion, the students produced, with the support of the instructor, two graphs corresponding to the protagonists' amounts as a function of the amount in the wallet. They also associated each of their conclusions with appropriate regions in the Euclidean plane.

From *our* perspective, an equation, $w + 8 = 3 \times w$, underlay the Wallet problem. To us, the equation raises the possibility that there may exist a value of w that yields the same value for two functions, which we might represent as $f(w) = w + 8$ and $g(w) = 3 \times w$. We do not claim that the fourth-grade students understood the problem in these terms. After all, they were not familiar with the function notation of the form, $f(x)$, or even with the term *function*. However, there is evidence that they were indeed reasoning about a condition in which two implicit functions have the same value. The students clearly showed that the functions, which they tended to describe as 'Mike's amount' and 'Robin's amount', co-varied.

In subsequent lessons, the students represented other problems involving the comparison of two functions by using an equation. In this context, they were introduced, in grade 5, to syntactic rules of algebra for solving equations.

Functions in early algebra interventions and student learning

In our third longitudinal study we evaluated the contribution of the three-year intervention on students' understanding of mathematics (Schliemann et al., 2012). We found that, at the end of grade 5, the intervention students performed significantly better than a control group on the set of 28 assessment items related to the intervention (which related to algebraic notation, graphs, functions and equations), and performed as well as the control group on 22 items not related to the intervention. The benefits of the intervention persisted two to three years later, when scores in state-mandated tests for treatment students we followed up were compared to those of a control group.

Blanton, Stephens, et al., 2015, have also documented the contribution of functions in early algebra activities to third-grade student learning. They developed, implemented and evaluated the results of a one-year implementation of 19 one-hour lessons on early algebra in grade 3, comparing written assessment answers of 39 students in the early algebra intervention to those of 67 students in the same district who received regular mathematics instruction without an early algebra intervention. The intervention focused on generalization, representations, justifications and reasoning about mathematical relationships (Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011; Kaput, 2008), and included items related to functional thinking and variables, as well as equivalence, expressions, equations, inequalities, generalized arithmetic and proportional reasoning. Students in the intervention group demonstrated significantly greater improvements in their assessment performance than those receiving regular instruction. They also represented indeterminate quantities with variable notation in a way that revealed they were thinking beyond particular instances, considering generalizations across a broad domain of numbers and representing functional relationships between covarying quantities.

Brizuela and Lara-Roth (2002) found that second-graders can be successfully taught to employ tabular representations of data. Carraher et al. (2008) showed how, from working with data tables, third-graders dealt with arithmetic properties, explored and represented, in their own ways, the function $f(x) = 2x + 2$, and even discussed the meaning of the expression $y = 2x + 2$. Here tables served as tools for students to understand the equivalence of expressions using the properties of operations to rewrite them. And Blanton, Brizuela, et al. (2015) and Cañasas et al. (2016) found that students in grades 1 and 2 (six and seven years of age), participating in eight weeks of classroom teaching sessions, represented situations using function tables, recognized functional relationships and used variable notation.

The influence, on teachers and students, of a teacher development programme highlighting functions

Informed by studies of early algebraic thinking, we developed an intensive, three-semester-long programme for in-service teachers structured around the idea that functions play a central role in integrating and deeply exploring isolated topics in the curriculum (see Hotomski, Schliemann, Teixidor-i-Bigas, & Carraher, 2018; Schliemann, Carraher, & Teixidor-i-Bigas, 2013; and Teixidor-i-Bigas, Schliemann, & Carraher, 2013; <https://sites.tufts.edu/poincare/>). Course materials and activities were developed jointly by mathematics educators, mathematicians and physicists. In each course, mathematics content and pedagogy (taking into account findings from research on student learning and thinking) were interwoven. Each weekly chapter of text, referred to as weekly ‘notes’, had previously gone through demanding rounds of editing and rewriting by the multi-disciplinary team.

The courses have been offered, mostly online, to teachers from grade 3 to 10, with two sets of materials (covering the same topics in varying depth), one set for elementary school teachers, the other for those in middle and high school. They emphasize variables, functions and multiple representations of mathematical objects to deepen understanding of arithmetic operations, fractions, ratio, proportion and the syntax of arithmetic and algebra. (Course materials are available upon request.) The materials cover why algorithms work, exemplify typical student conceptions about mathematics topics and consider how mathematics is used to model in applied situations. They generally encourage drawing on students’ spontaneous reasoning, generalizations, representations and discussions about relations between sets of physical quantities and numbers. Teachers tend to work a minimum of 10 hours per week on course assignments, regularly publish their responses to questions online and receive feedback throughout the week from course mentors.

During the programme’s three semesters of credit-bearing courses, teachers discussed the mathematical content; solved and discussed problems in online groups of approximately eight teachers and an instructor; examined and discussed videos from research on early algebraic thinking; interviewed their own students; and planned, implemented and discussed their own lesson

implementations in groups, typically of three to five teachers from their schools. They were often encouraged to improve lessons they had found in textbooks or other sources while relating the content of the lessons to variables, functions and conventional mathematical representations.

The fourth cohort of teachers in the programme were directly or indirectly engaged in elementary mathematics teaching in a Greater Boston district in a low-income area, where 18% of the students were African American and 44% were of Hispanic/Latino origin.

Twenty-two elementary teachers of grades 3 to 5 (34% of the 63 elementary school teachers in the district) took the courses, along with seven other participants who worked as coaches, interventionists or special educators. (There were also 34 grades 5 to 9 teachers in the programme.)

We examined the percentage of students in grades 3 to 5 classified as ‘proficient’ (levels 4 and 5) on the state-mandated test at the time (PARCC, the Partnership for Assessment of Readiness for College and Careers). The data in [Table 2](#) allow for comparisons between the percentages of proficient students in 2015 (the year before the teachers started the programme) with corresponding percentages in 2016 (after teachers had completed course two of the three-course sequence).

[Table 2](#) also allows for comparing the changes in results in the target district to changes in 10 other districts matched according to results in 2015, district size, parental income, ethnicity and other demographics. The target district and the 10 matched districts were all implementing the CCSSI standards.

For each grade level, the increase in the percentage of proficient students in the target district (last column in the table) surpassed those for the matched districts. In the target district the increases varied from 8.44% to 12.24%; in the matched districts they ranged from only 2.28% to 6.62%.

Across the state, changes in proficiency were less heartening, ranging from -4.40% (a decrease) to 5.37%. In Boston, a much larger district with similar

Table 2. Percentage of proficient students (PARCC Levels L4 + L5).

	2015	2016	Increase in %
Grade 3			
Target District	42.77	51.21	8.44
Matched Districts	40.18	46.80	6.62
Difference Target vs. Matched	2.59 (NS)	4.41 ($p = .024$)	
Grade 4			
Target District	42.27	54.51	12.24
Matched Districts	38.10	40.38	2.28
Difference Target vs. Matched	4.17 ($p = .042$)	14.13 ($p = .0001$)	
Grade 5			
Target District	31.15	41.14	9.99
Matched Districts	32.80	36.52	3.72
Difference Target vs. Matched	-1.65 (NS)	4.62 ($p = .027$)	

demographics yet much greater financial resources, the increase was slight, varying from 2.05% to 3.58%. The target district also showed relatively greater increases for grades 6 through 8 (see Hotomski, Schliemann, & Carraher, 2018).

In 2015 (the baseline), the z -values for difference in percentages of proficient students between the target and matched districts were not significant for grades 3 and 5, but there was a small but significant difference, 4.17%, at grade 4, favouring the target district. So, with one minor exception, the districts were well matched. In 2016, the z -values indicated that the differences between the target and the matched districts (from 4.41 to 14.13 percentage points across the grades) were all significant. The grade 4 group from the target district showed considerably greater gains, by nearly 10%, over matched district groups.

These results suggest that the programme contributed to students' mathematical proficiency in grades 3–5 in a low-income district with a majority of African American and Hispanic/Latino students. It is worth noting that the test was based on general mathematics content consistent with the CCSSI standards for grades 3 to 5; no attention was given to students' understanding of variables or functions. The measures of impact were conservative: the results were based on the performance of all students in the target district even though only approximately one-third of its students had been taught by teachers enrolled in the programme. Finally, we should acknowledge that although we matched 10 districts to the target district on a number of criteria, the target district was not chosen by random assignment; thus, the study was not experimental.

Concluding thoughts

Both the NCTM and CCSSI standards acknowledge the importance of patterning activities in the initial segment of the algebra strand. The NCTM standards also emphasize key connections among patterns, variables, functions and relations — connections that it recommends be diversely explored well before middle school.

The CCSSI standards, on the other hand, recommend that functions be introduced only in grade 8 and that variables be introduced, essentially as unknowns, in grade 6. We believe that such recommendations reflect significant shortcomings. For one thing, most elementary teachers would be unlikely to explore patterns and sequences deeply with their students without having an appreciation of how to link patterns to functions and relations. Many teachers would miss opportunities to introduce young students to letter symbols as variables. And sixth-grade students would miss the opportunity to learn about unconstrained variables.

Successfully building a vertical algebra strand requires weaving connections across topics — connections that are perhaps too intricate to be covered in standards. For example, on their own, many teachers would likely fail to see how a recursive representation of a sequence both relates to and goes beyond the simple act of extending a sequence. Many would also not discover how to move from a recursive to an explicit, non-recursive representation of a function. Nor

would they see connections between a geometric progression and a linear function.

Studies show that algebraic expressions first become meaningful as representations of properties of classes of numbers (algebra as generalized arithmetic) and as functions and relations associated with diverse problem contexts. Under these conditions, elementary school students can learn to adopt algebraic notation far earlier than once thought and to use letters as place-holders for arbitrary members of a domain.

Several studies, including ones involving children from multi-ethnic, low-income districts, have shown that students who have had early algebra instruction outperform their peers both on tests of algebraic reasoning that call for mathematical generalizations and on tests of general mathematics achievement. Additional studies have found that students (again, when given suitable preparation) can begin to meaningfully employ conventional algebraic notation in the early grades. There is also evidence that, by grade 3, students can learn to treat variable quantities as functions and to discover that, for a particular value of the input variable, the value of each function, that is, each quantity, will be equal. This foreshadows ‘solving a linear equation for x ’. Although students need to eventually learn how to address such problems through syntactically driven or syntactically justifiable operations on equations, we believe much is to be gained by establishing initial trust in formal notation on the basis of its utility in expressing relations among, and deriving new insights about, quantities.

If anything, the findings recommend that those engaged in early education reexamine the breadth and depth of mathematical understanding young students are able to achieve when given supportive opportunities.

To promote algebraic thinking in elementary school, teachers need to develop expertise in helping students transition from their own, somewhat implicit, representations to particular kinds of natural language structures, graphs, geometric diagrams and conventional algebraic notation itself. It is unrealistic to hope that teachers, left to themselves, will make much headway along this path without considerable preparation.

How are mathematicians, mathematics educators, curriculum developers and policy-makers to prepare teachers for the road ahead?

A decade ago, a major evaluation of elementary teacher preparation was undertaken by the National Council on Teacher Quality [NCTQ] (Greenberg & Walsh, 2008). The Council found that 18 of the 51 states (35.3%) had no requirements at all or no requirements regarding specific areas of mathematics. Within states, the requirements at individual institutions often bore no obvious relationship to official state requirements. The Council concluded that few education schools covered the mathematics content elementary teachers need and that there was a widespread inattention to algebra. The report concluded that: ‘A deeper understanding of elementary mathematics, with more attention given to the foundations of algebra, must be the new “common denominator” of our preparation programs for elementary teachers’ (p. 59). We agree.

Successfully implementing an algebraic thinking strand requires long-term teacher development programmes capable of integrating mathematics content and teaching responsive to the sense students are making of mathematics. Programmes of short duration are not likely to meet these goals (Ball et al., 2005; National Commission on Teaching and America's Future, 1996).

Our experience has convinced us of the importance of close collaboration among mathematics educators, research mathematicians and scientists. Given the substantial rifts (Loveless, 2001) that continue to this day, between extreme varieties of constructivism and extreme ‘back to basics’ movements, a considerable amount of conflict is likely to occur on what promises to be a long road to reconciliation.

By our reckoning, it will take decades of concerted effort for a K–12 algebra strand to be successfully realized on a wide scale in the US. The success of the initiative will depend greatly on whether state legislatures and institutions offering teacher development programmes make fundamental changes in credentialing requirements and course offerings. One might easily dismiss such a prospect as unrealistic and overly demanding, were it not for the fact that we now know that young students, from a variety of backgrounds, can meet the challenges if offered the opportunities.

Notes

1. The interested reader may wish to compare how strip diagrams were employed in Bodanskii (op. cit.) from the Davydov approach with those used by Beckmann (2004) from the Singapore mathematics approach.
2. During discussions in an initial phase of our studies on early algebra, Bárbara Brizuela proposed the expression ‘bringing out the algebraic character of arithmetic’ to characterize our joint work.
3. In science, one regularly searches for patterns in data with ‘noise’. Such cases do not require that the pattern or model perfectly match the data. Indeed, one typically expects a less than perfect ‘fit’. And one may even use a function as a model of data for which the rule ‘each input value has a unique output value’ is violated. Although science provides important contexts for exploring how patterns are related to relations, there is insufficient room to discuss such matters here.
4. Some authors describe the non-recursive variant as ‘functional’, but this suggests that the recursive approach is not functional. The recursive and non-recursive variants are different representations of a similar underlying function, in the modern sense of ‘same set of ordered (input-output) pairs’. We say ‘similar’ rather than ‘same’ because the recursive form may have a different domain and codomain (e.g., the natural numbers) than the non-recursive form (real numbers). If domains and codomains are the same in each case, then the recursive and non-recursive definitions describe the very same function.

El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6-12 años) en Estados Unidos

Visión general

Agradecemos a los editores de *Infancia y Aprendizaje* la oportunidad de situar la investigación sobre el pensamiento algebraico temprano en el contexto de los estándares matemáticos actuales en Estados Unidos. Las ideas que presentamos surgen de nuestra experiencia como investigadores, profesores y, recientemente, formadores de profesores en Estados Unidos y Brasil, así como de nuestras respectivas trayectorias, ciertamente limitadas, en el campo de las matemáticas y la política educativa.

En este artículo abordaremos las siguientes cuestiones, dedicando una sección a cada una de ellas:

- ¿Por qué integrar el álgebra en el currículum de Educación Primaria?
- Los estándares matemáticos para la enseñanza del álgebra en Educación Primaria.
- El pensamiento algebraico sin notación algebraica.
- El pensamiento algebraico mediante patrones, funciones y relaciones.
- Enfoques algebraicos basados en las funciones en las escuelas primarias de Estados Unidos: su impacto en los docentes y en los estudiantes.

En la sección final, señalamos una discrepancia significativa entre el NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) y la iniciativa CCSSI (*Common Core State Standards Initiative*) en Estados Unidos respecto a cómo integrar el álgebra desde los cinco a los 17 años. Concluimos valorando los posibles cambios necesarios en la formación de los maestros de primaria para llevar a cabo la integración del álgebra en el currículum.

Por qué integrar el álgebra en el currículum de educación primaria?

Durante los 90, la idea de un itinerario longitudinal de álgebra que recorriese todos los cursos de primaria y secundaria comenzó a formar parte de las discusiones de la comunidad de maestros de matemáticas en Estados Unidos. Un importante escenario de estas discusiones fue el llamado 1993 *Algebra Initiative Colloquium* del Departamento de Educación de Estados

Unidos (LaCampagne, Blair, & Kaput, 1995). Este encuentro reunió a 51 docentes de álgebra, matemáticas, investigadores en educación, algebristas y representantes de agencias federales para fomentar el diálogo sobre el ‘problema con el álgebra’. Esta expresión reflejaba una concienciación cada vez mayor de que la asignatura ‘Álgebra I’, que por lo general se cursa en el Grado 9 (14–15 años), ejercía de ‘filtro’ hacia cursos más avanzados y futuras carreras en ciencias y matemáticas. La mayoría de los participantes en la iniciativa se dieron cuenta de que, como las investigaciones ya habían demostrado sobradamente: (a) muchos estudiantes que habían tenido la suerte de cursar asignaturas de álgebra en la adolescencia mostraban serias dificultades con la materia y (b) estas dificultades parecían surgir del enfoque adoptado en la enseñanza de las matemáticas en los cursos anteriores. En este artículo nos centramos en este último punto.

En la citada iniciativa, Kaput (1995), que basó su propuesta de integración del álgebra en el currículum en el concepto de ‘continuidad vertical’ acuñado por Steen (1990), concebió la enseñanza del álgebra como un hilo que recorría la totalidad del currículum desde los cinco hasta los 17 años (K12).

... en el que las ideas principales se entrecruzan en los distintos niveles académicos, entrelazándose entre ellas para crear un tejido rico que presenta una única dirección, un flujo natural que parte del vasto crisol de la experiencia concreta hacia las generalizaciones y abstracciones, de las representaciones informales y basadas en el lenguaje a las representaciones más formales. (p. 35)

En las últimas décadas, las principales iniciativas reformistas han adoptado el concepto general de un itinerario de álgebra en K–12:

... en el que los estudiantes pueden tener una experiencia del álgebra a largo plazo en sus estudios de matemáticas que comienza en los primeros cursos y les permite desarrollar sus intuiciones informales y de manera natural sobre los patrones y las relaciones hacia otros modos más formales de pensamiento matemático (e.g., National Governors Association Center for Best Practices [NGA] & Council of Chief State School Officers [CCSSO], 2010; NCTM [National Council of Teachers of Mathematics], 2000, 2006). (Blanton, Stephens, Knuth, Gardiner, Isler, & Kim, 2015,, p. 40)

Puede parecer extraño incluir el álgebra en la escuela primaria, dadas las dificultades a las que se enfrentan los adolescentes en esa asignatura. No obstante, el álgebra temprana (*early algebra*) no es lo mismo que ‘álgebra temprano’ (*algebra early*) (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008). Además, investigaciones recientes con distintas perspectivas demuestran cómo puede introducirse el pensamiento algebraico en las aulas de Educación Primaria con éxito (e.g., los volúmenes editados por Cai & Knuth, 2011; Kaput, Carraher, & Blanton, 2008 y Kieran, 2018).

Los estándares matemáticos para la enseñanza del álgebra en educación primaria

Desde la formación del *Algebra Initiative Colloquium* (LaCampagne et al., 1995), los estándares para la enseñanza de matemáticas del NCTM (2000) y, una década después, la CCSSI [Common Core State Standards Initiative] (2010) han incluido temas y recomendaciones sobre la introducción del álgebra en el currículum de primaria. Estas recomendaciones pretendían influir en los requisitos del currículum escolar, los materiales escolares, la preparación del profesorado y la evaluación de los escolares.

El NCTM (2000) concibió la introducción del álgebra en los primeros cursos escolares como una vía para que los maestros ayuden a los estudiantes a construir una base para el aprendizaje del álgebra en Educación Secundaria (12–16 años) y sugería que la ‘experiencia sistemática con patrones puede contribuir al conocimiento del concepto de función’ (p. 37).

Integrar el álgebra a modo de itinerario vertical a lo largo de todo el currículum de K–12 rompe con la tradición norteamericana de dar paso al álgebra oficialmente en la adolescencia, a finales de la educación secundaria obligatoria o primer curso de bachillerato (NTCM, 2000). Al concebir el álgebra básica y la aritmética como dos áreas estrechamente interrelacionadas desde el principio, la perspectiva del itinerario de álgebra en K–12 difiere también de los programas ‘pre-álgebra’ de transición entre la aritmética y el álgebra.

Las expectativas del NCTM en materia de álgebra para preescolar (desde los tres años) y hasta los 9–10 años se estructuran en torno a cuatro temáticas en las que los estudiantes de cuatro a 10 años deberían: (a) comprender patrones, relaciones y funciones; (b) representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos matemáticos; (c) utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; y (d) analizar el cambio en diversos contextos.

En los primeros cursos, los estudiantes entrarían en contacto con el álgebra sin utilizar la notación formal. Por ejemplo, desde preescolar hasta los 5–6 años, los estudiantes serían capaces de

Ilustrar principios y propiedades generales de ciertas operaciones como la commutativa, utilizando números específicos y representaciones concretas, pictóricas y verbales, para desarrollar su conocimiento de las notaciones simbólicas convencionales (NCTM, 2000, p. 90)

En los siguientes cursos de primaria, hasta los 9–10 años, los estudiantes

Identifican propiedades como la commutativa, la distributiva o la asociativa y las utilizan para operar con números enteros; representan el concepto de variable como una incógnita utilizando una letra o símbolo; expresan relaciones matemáticas mediante ecuaciones; modelan situaciones o problemas utilizando objetos y representaciones tales como gráficos, tablas y ecuaciones para extraer conclusiones; investigan la relación entre un cambio en una variable y un cambio en la segunda variable; identifican y describen situaciones con índices de variación constante o variable y las comparan (NCTM [National Council of Teachers of Mathematics], 2000, p. 90)

Tabla 1. Habilidades de la CCSSI sobre las operaciones y el pensamiento algebraicos.

Nivel	Competencias
Preescolar (3–6 años)	Comprender la suma como reunir y añadir, y la resta como separar y quitar.
Primero (6–7 años)	Representar y resolver problemas que implican sumas y restas. Comprender y aplicar propiedades de operaciones y la relación entre suma y resta. Sumar y restar hasta 20.
Segundo (7–8 años)	Trabajar con ecuaciones de sumas y restas. Representar y resolver problemas que incluyen sumas y restas. Sumar y restar hasta 20. Trabajar con conjuntos iguales de objetos para adquirir los fundamentos de la multiplicación.
Tercero (8–9 años)	Representar y resolver problemas que incluyen multiplicar y dividir. Comprender las propiedades de la multiplicación y la relación entre la multiplicación y la división. Multiplicar y dividir hasta 100. Resolver problemas que incluyen las cuatro operaciones e identificar y explicar los patrones en aritmética.
Cuarto (9–10 años)	Utilizar las cuatro operaciones con números enteros para resolver problemas. Adquirir familiaridad con factores y múltiplos. Generar y analizar patrones.
Quinto (10–11 años)	Escribir e interpretar expresiones numéricas. Analizar patrones y relaciones.

Fuente: CCSSI (2010).

Por otro lado, la CCSSI (2010) contempla el álgebra (véase Tabla 1) como el ámbito de las operaciones y el pensamiento algebraicos desde preescolar, con aptitudes y capacitaciones recomendadas en cada curso.

Aunque tanto el NCTM como la CCSSI demandan la introducción del ‘pensamiento algebraico’ desde muy pronto, los estándares del NCTM están más claramente relacionados con el álgebra que los de la CCSSI.

El NCTM (2000) recomienda que, en educación infantil y primer curso de primaria (6–7 años), los niños aprendan a ‘reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o patrones numéricos sencillos, y que los trasladen de un tipo de representación a otra, analizando cómo se generan tanto los patrones repetitivos como los crecientes (p. 90)’, y reconoce que los patrones en estos grados están relacionados con secuencias, funciones y relaciones. En los cursos siguientes, hasta los 9–10 años, el NCTM recomienda que se haga uso de múltiples representaciones de patrones y funciones, conciban la variable como un miembro arbitrario de un campo determinado, representen las relaciones entre cantidades mediante ecuaciones y consideren la covariación y los índices de variación (constantes o variables).

Por otro lado, la CCSSI (2010) recomienda que, a partir de los 6–7 años, los alumnos aprendan a ‘identificar patrones aritméticos (entre los que se incluyen

las series en las tablas de sumar o multiplicar) y explicarlos utilizando propiedades de las operaciones'. En cuarto (9–10 años) se espera que sean capaces de generar un patrón numérico o de formas a partir de una regla determinada y de identificar características que no están explícitas en la regla. En el curso siguiente, se espera que sean capaces de 'generar dos patrones numéricos utilizando dos reglas dadas, identificar relaciones aparentes entre términos correspondientes a partir de pares ordenados formados por dos términos correspondientes de los dos patrones o series y dibujar gráficamente los pares ordenados en un plano de coordenadas'.

La CCSSI no anticipa la introducción de la notación algebraica hasta sexto (11–12 años). A diferencia del NCTM, introduce las funciones en el estándar para el grado 8 (13–14 años). Este retraso parece poco recomendable, dado que: (a) es más probable que los docentes puedan incentivar el pensamiento algebraico de los alumnos en los primeros cursos si estos ya conocen cómo se relacionan los patrones con las funciones y las relaciones de proporcionalidad; (b) las operaciones aritméticas ofrecen muchas oportunidades de trabajar con funciones; y (c) como se detalla más delante, la investigación demuestra que los estudiantes más jóvenes son capaces de desarrollar un conocimiento básico sólido de las funciones simples e incluso expresarlas utilizando la notación algebraica convencional. La introducción relativamente tardía de las variables, principalmente en el contexto de resolución de ecuaciones, también ofrece una visión restringida de la variable como incógnita específica (Schoenfeld & Arcavi, 1988).

El pensamiento algebraico sin notación algebraica

¿Qué es el álgebra?

En el lenguaje común, 'álgebra' suele hacer referencia a reglas y procedimientos para la manipulación de ecuaciones que contienen letras que representan variables: '... por ejemplo, la pregunta "¿Cuánto es 3×7 ?" se considera perteneciente a la aritmética, mientras que la pregunta "Si $x + y = 10$ y $xy = 21$, ¿cuál es el valor de la mayor de las dos incógnitas?" se considera perteneciente al álgebra' (Gowers, 2008, p. 1).

El grupo de trabajo del NCTM para el álgebra ofrece una definición más útil del álgebra como '... el estudio de patrones/relaciones y funciones que hace uso de diversos tipos de representaciones, verbal, tabular, gráfica y simbólica (Schoenfeld, 1995, p. 11)'. Esta definición reconoce que el álgebra puede adoptar formas de representación distintas de la notación algebraica.

En este artículo adoptamos la definición de álgebra del grupo de trabajo del NCTM, con la salvedad que 'relación' aquí se entiende como relación/proportión (relationship), un término del arte en matemáticas.

Vale la pena señalar que los matemáticos de la antigüedad 'resolvían ecuaciones' satisfactoriamente utilizando el lenguaje natural o diagramas geométricos (Katz, 1995). Como veremos, existe evidencia suficiente de que los estudiantes pueden aprender a realizar generalizaciones matemáticas antes de haber aprendido la notación algebraica.

En la enseñanza de las matemáticas no existe el consenso sobre los términos ‘simbólico’ y ‘algebraico’. El NCTM considera simbólicas las generalizaciones que se expresan mediante notación algebraica convencional. Radford (2018) parece adoptar esta noción de ‘simbólico’ cuando se refiere a la generalización matemática sin notación algebraica convencional como ‘álgebra no simbólica’. Balacheff (2001), sin embargo, utiliza el término ‘simbólico’ en el sentido amplio en el que el lenguaje natural, las tablas y los gráficos se consideran formas de representación simbólica en tanto que incluyen símbolos (palabras, números, gráficos), pero consideran lo que denominamos ‘pensamiento algebraico’ como ‘aritmética simbólica’.

Pensamiento algebraico y variables implícitas

La definición de Kieran ofrece un buen punto de partida para hablar del pensamiento algebraico:

El pensamiento algebraico en los primeros cursos académicos implica el desarrollo de diversos tipos de reflexiones como parte de las actividades en los que puede utilizarse la representación simbólica algebraica mediante letras como herramienta, pero no exclusiva, del álgebra, de modo que pueda llevarse a cabo también sin ningún tipo de representación simbólica con letras, como por ejemplo el análisis de las relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, el modelado, la justificación, el ensayo y error y la predicción. (Kieran, 2004, p. 149)

Esta definición apunta a varios tipos de actividades en las que es posible que ocurra el pensamiento algebraico. Nosotros añadiríamos que el pensamiento algebraico también suele implicar la reflexión sobre variables, posiblemente de forma implícita.

Fujii y Stephens (2001) ilustran un tipo de variable implícita en su análisis de ‘expresiones numéricas generalizables’, en las que los números hacen las funciones de *cuasi-variables*. Los autores hacen referencia al relato de Carpenter y Levi (1999) sobre las discusiones de los estudiantes en torno a la ecuación $78 - 49 + 49 = 78$. Los estudiantes parecían comprender que los números específicos no eran importantes. Un estudiante piensa que ‘no importa qué números utilizas’ está considerando los números como variables, es decir, elementos arbitrarios de un conjunto de números posibles. Expresado de una manera más formal, podríamos decir que los números a, b podrían reemplazarse por cualquier número siempre que se mantenga intacta la estructura algebraica subyacente $a - b + b = a$.

Los estándares del NCTM hacen alusión a las *cuasi-variables* en sus expectativas de que los estudiantes en preescolar y hasta los siete años (grado 2) deberían ser capaces de ‘ilustrar principios y propiedades generales de las operaciones, tales como la propiedad commutativa, utilizando números específicos’ (NCTM, 2000, p. 90). Un estudiante que afirma que $8 + 5$ es igual que $5 + 8$ podría estar expresando una generalización que podríamos

formalizar como $a + b = b + a$ y relacionarlo con la propiedad commutativa de la suma. Se podría ofrecer un análisis similar para cada uno de los axiomas de este campo.

En el lenguaje natural suelen surgir *variables implícitas*. Podríamos describir lo que tiene una persona en relación con otra diciendo: ‘Mary tiene tres caramelos más que John’, aunque no se conoce la cantidad total de ninguno de los dos (Brizuela, 2016; Carraher et al., 2008). Un enunciado de ese tipo está apenas a un paso de la expresión ‘Los mismos caramelos que John más tres caramelos’ y de $n + 3$, donde n representa la cantidad de caramelos que tiene John. A su vez, esta expresión está a un paso de la relación $m = n + 3$, donde m representa la cantidad de caramelos que tiene Mary. La misma relación se puede representar como $m - 3 = n$ y $m - n = 3$.

Las variables, tanto implícitas como explícitas, suelen estar integradas en objetos matemáticos como las funciones o las ecuaciones. Por ejemplo, una variable puede aparecer en: ‘(a) una fórmula; (b) una ecuación (o una frase abierta) por resolver; (c) una identidad; (d) una propiedad; y (e) una ecuación de una función de variación directa (no para resolver)’ (Usiskin, 1988, p. 7). Por supuesto, las variables también pueden aparecer en expresiones simples como $x + 3$.

Cinco décadas atrás, Davydov (1969/1991) mostró que a partir de los seis o siete años, los estudiantes pueden aprender a crear y hacer inferencias a partir de ecuaciones o desigualdades simples utilizando franjas rectangulares, letras simbólicas y otras formas de representación de una cantidad indeterminada de valor presumiblemente fijo en un problema formulado mediante palabras. Trabajos en la tradición de Davydov Bodanskii¹ (1969/1991), Dougherty (2008) y Schmittau (2005) evidencian que los más jóvenes pueden aprender a trabajar con marcadores o indicadores para las cantidades indeterminadas antes de dominar la suma y la resta. Por ejemplo, si se presentan dos cañas con longitudes determinadas como A y B de manera que A es más larga que B , pueden razonar que podría haber una tercera caña (una tercera longitud), C , de modo que $B + C = A$. También pueden aprender a expresar, en sus propias palabras y en notación formal, que $B = A - C$, y $C = A - B$. En definitiva, reconocen que cada una de las ecuaciones expresa la misma relación entre las cantidades A , B y C . Esto se confirma de nuevo señalando que cada ecuación puede representarse utilizando una tabla de tres columnas con los encabezados ‘ A ’, ‘ B ’ y ‘ C ’ y los mismos triples (A , B , C).

Carpenter y Levi (1999) observaron que los escolares de primaria muestran un razonamiento algebraico implícito, generalizaciones y justificaciones, comentan la veracidad o falsedad de enunciados numéricos y reflexionan sobre las relaciones estructurales entre los números como marcadores o como variables.

Tanto nuestros estudios como los de Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, y Newman-Owens (2015) y Blanton, Stephens, et al. (2015) han incluido la participación de estudiantes en actividades de pensamiento algebraico y de generalizaciones sobre relaciones estructurales mientras se centraban en variables y relaciones funcionales, particularmente utilizando conjuntos de números o cantidades.

Del mismo modo que el pensamiento algebraico emergió antes de la notación algebraica moderna (Boyer, 1968), las funciones emergieron antes de que se utilizara el término *función* y antes de que se interpretara a una función como un objeto geométrico asociado a una curva, como una cantidad que varía junto a otra y como una relación que vincula cada elemento de un dominio con un único elemento de un co-dominio (Kleiner, 1989).

Cuando nos tomamos en serio la noción de que la ‘función es un operador u operación que, aplicada a un número (u otro objeto) arroja un número (u otro objeto)’ (Quine, 1987, p. 72), las propias operaciones aritméticas pueden considerarse funciones (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2000; Carraher et al., 2008). Esto nos ayuda a ‘resaltar la naturaleza algebraica de la aritmética’ (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007)² y apoya la idea de las variables como marcadores para miembros arbitrarios de conjuntos. Las funciones son abstractas y a la vez adaptables a múltiples formas de representación y pueden servir para modelar fenómenos físicos. Dado que las ecuaciones pueden ser interpretadas fructíferamente como una comparación de dos funciones (Schwartz & Yerushalmi, 1992) y las funciones pueden representarse mediante formatos no algebraicos, surge la oportunidad para que los estudiantes trabajen con relaciones vinculadas con ecuaciones antes de que lleguen a dominar la notación algebraica (véase la discusión del problema del monedero, más adelante).

El pensamiento algebraico mediante patrones, funciones y relaciones

Los patrones están asociados a una gran variedad de contextos: danza, música, tejidos, huellas dactilares, esquemas rítmicos de la poesía, historias detectivescas, itinerarios aéreos, estilos arquitectónicos, hojas de cálculo y, por supuesto, matemáticas. Las matemáticas, incluso, se consideran en ocasiones como ‘la ciencia de los patrones’ (Resnick, 1981; Steen, 1988). Sin embargo, ‘patrón’ no es un término matemático. Aunque tanto el NCTM como la CCSSI enfatizan la importancia de los patrones para construir un itinerario algebraico en la educación primaria, dejan el término sin definir.

En ocasiones, el patrón se corresponde con una propiedad aislada. Por ejemplo, podríamos expresar la idea de que una función incrementa uniformemente mediante un patrón según el cual los valores de la función nunca disminuyen a medida que la variable independiente aumenta. Una función puede ser uniforme, pero hay infinitamente muchas funciones uniformes.

Algunos patrones, así como algunas asunciones, transmiten una propiedad definitoria de una secuencia o función, siempre que se acuerden el dominio y co-dominio. En el caso de una secuencia, el medio por el que se determina un ítem a partir de su predecesor debe carecer de ambigüedad. En el caso de una función debe ser posible, en principio, generar todos los pares ordenados a partir del análisis del patrón.

Consideremos el patrón que se muestra en la Figura 1. Supongamos que, después de cualquier ítem, cada uno de los ítems subsiguientes se origina creando una réplica de ese ítem y añadiendo, en la base, una línea horizontal

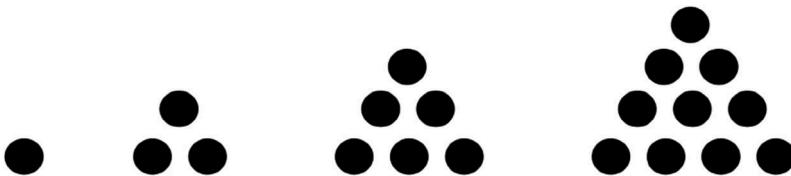


Figura 1. Un patrón geométrico sencillo (véase Carraher & Schliemann, 2007).

Nota: El ejemplo de la Figura 1 representa una sucesión de números figurados (Hobgood & Hitchings, 2019), en la que las figuras triangulares corresponden a una función cuadrática. Es poco probable que los estudiantes descubran una representación algebraica de los números triangulares antes de haber dominado los algoritmos escolares de la multiplicación y de familiarizarse con el uso de las letras para representar variables.

de puntos que contenga un punto más que la anterior, de modo que se confiere una forma de triángulo equilátero a la nueva figura. Por lo general, en el contexto de la escuela primaria, no sería necesario declarar dicha asunción de manera explícita; los estudiantes lo inferirán con facilidad, o algo equivalente, observando los primeros ítems de la serie y viendo cómo se construye el ítem siguiente a partir del anterior.

En la [Figura 2](#) se muestra el 5º ítem, supuestamente construido del mismo modo que los ítems del 2 al 4, a partir de sus respectivos predecesores.

Los estándares matemáticos del NCTM y de la CCSSI parecen adoptar ambos significados del término ‘patrón’ (como una propiedad aislada y como una propiedad definitoria singular), además de posiblemente varios otros³. Por ejemplo, en ocasiones, los estándares se refieren a patrones cuando mencionan estructuras o propiedades de los sistemas numéricos, como los decimales o las estructuras de valor posicional. No obstante, por lo que respecta a la transición de ‘patrones a secuencias y a funciones’ que nos concierne en este estudio, ambos grupos parecen utilizar el término ‘patrón’ para referirse a un patrón definitorio y sin ambigüedad.

La distinción entre patrones y relaciones, incluidas las funciones, es digna de mención. La perspectiva moderna de una relación binaria es la de la correspondencia entre elementos de dos conjuntos, un dominio y un codominio, típicamente formados por números, pero también pueden estar formados por valores cuantitativos, figuras geométricas, o cualquier otra clase de objetos. (En el caso de la función, cada elemento del dominio está

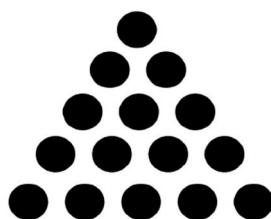


Figura 2. El siguiente ítem de la secuencia.

asociado con un único elemento del co-dominio). Esta concepción esquemática de la relación no implica un patrón. Es posible que una serie de números distribuidos aleatoriamente entre los estudiantes de una clase de modo que cada estudiante está asociado con un número defina una función de los estudiantes y los números, aunque tal vez no exista un patrón identificable (en el sentido de una representación identificable que explique todos los pares ordenados).

El hecho de que, según la perspectiva moderna, algunas relaciones existan sin un patrón no debería preocuparnos. La gran mayoría de las relaciones de interés en la enseñanza temprana de matemáticas exhiben patrones. En el siglo XVIII, Euler definió la función como sigue:

Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, en cualquier configuración, por esa cantidad variable y números o cantidades constantes. (Kleiner, 1989, p. 284, traducción propia)

En la actualidad, los docentes de matemática temprana pueden asumir, como hizo Euler, que existe un patrón subyacente. Pero, a diferencia de Euler, tienen que recordar que las funciones pueden representarse utilizando formas no algebraicas.

Consideremos ahora el caso más sencillo de la progresión aritmética de puntos: 1, 4, 7, 10, etc. Para nosotros, que interpretamos la secuencia como una función, centrarnos en ampliar el patrón es equivalente a determinar $f(n + 1)$ a partir de $f(n)$, donde $f(n)$ representa el número de puntos en el paso n .

Producir el siguiente grupo de puntos es relativamente sencillo y, una vez que se ha producido la figura, podemos contar los puntos con facilidad. Conseguir una descripción definitiva de la secuencia requiere mucho más esfuerzo. Y existen dos maneras, radicalmente distintas, de hacerlo: mediante una descripción recursiva o mediante una descripción explícita, no recursiva.

Generar un resultado a partir de una información dada aplicando un enfoque recursivo válido sin retroceder requiere comenzar con el valor inicial e iterarlo al tiempo que se realiza un seguimiento de la posición de cualquier figura de la secuencia (e.g., Earnest, 2014; Ferrara & Sinclair, 2016), hasta que se alcanza la posición del valor requerido. Esto implica conocer en qué paso de la secuencia debemos detener la iteración. En la notación simbólica con letras, es necesario crear una variable que designa la posición en la secuencia que será el argumento de la función.

Para hallar el valor de una progresión aritmética en la posición n , una *representación recursiva* requiere conocer necesariamente: (a) el valor en la posición 1 o valor inicial, $f(1) = c$, y (2) el incremento fijo en cada posición siguiente, es decir, $k = f(m + 1) - f(m)$. Entonces, el valor de la secuencia en la posición p puede computarse como el valor inicial más los incrementos desde la posición 1 a la posición p . La representación recursiva puede enunciarse formalmente mediante el siguiente par de ecuaciones:

$$f(1) = c; f(p + 1) = f(p) + k;$$

Una descripción *explícita y no recursiva*⁴ de una progression aritmética expresa directamente la relación entre la posición de un número y el valor en la posición correspondiente. Se puede expressar mendiane la fórmula

$$f(p) = c + (p - 1) \times k$$

en la que c corresponde al valor inicial y k corresponde al valor de cada incremento.

Hemos observado (Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2001, 2007) que en tercero (8–9 años) los estudiantes a veces completan las tablas de funciones utilizando iteraciones, primero en una columna y después en la siguiente. Este enfoque puede dificultar la formulación de una descripción explícita no recursiva por parte de los alumnos. Los profesores pueden ayudarles en esta transición sugiriendo que averigüen el resultado de un valor remoto (e.g., ‘en el paso 100’, o ‘cuando el input es 100’) o un paso arbitrario (e.g., ‘utilizando n como input’, donde n hace referencia a cualquier paso distinto de 1) (véase Carraher, Martínez, & Schliemann, 2008).

Para algunos lectores, la descripción explícita no recursiva de una progresión aritmética evocará la idea de una función lineal y su forma estándar, $y = mx + b$, utilizada habitualmente para representar relaciones lineales mediante números reales.

Estudiantes de corta edad identifican funciones en patrones

Ferrini-Mundi, Lappan, y Phillips (1997) describen cómo los patrones pueden explorarse desde la etapa de Educación Infantil hasta 6º de primaria utilizando una situación (Figura 3), adaptada del grupo de trabajo de álgebra del NCTM (1995).

Las transcripciones de las clases revelaron que, en todos los cursos, los docentes que hacían uso de este problema podían ayudar a sus alumnos a progresar de contar baldosas a expresar generalizaciones, teniendo en cuenta la relación entre el número de baldosas azules y el número de baldosas blancas y representando estas relaciones con palabras, baldosas, tablas, gráficos y notación algebraica. Ferrini-Mundi y sus colegas sugieren que, tras comentar varias piscinas de diversos tamaños y dibujar sus representaciones con baldosas, se podría pedir a los estudiantes de primero que relacionasen el número de baldosas de un cuadrado con la longitud del bordillo. En segundo curso, podrían empezar a organizar los datos en una tabla y utilizar la suma y la multiplicación. En tercero y cuarto, los estudiantes podrían considerar el número de baldosas azules y blancas de una piscina de una longitud determinada y determinar el número de baldosas del bordillo a partir del número de baldosas azules (del fondo), y viceversa. Cuando analizan las tablas de datos, trabajan con fracciones y proporciones en relación con el número de baldosas azules y blancas y con el número total de baldosas. En quinto y sexto, el docente podría poner de relieve las funciones de un modo más explícito a medida que los estudiantes

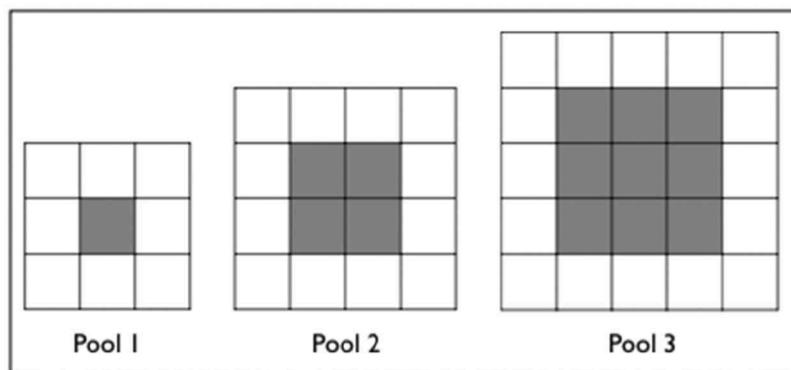


Figura 3. Piscinas con bordillos.

Tat Ming está diseñando piscinas cuadradas. Cada una de ellas tiene un cuadrado central que es el área que contiene el agua. Tat Ming utiliza baldosas azules para representar el agua. Alrededor de cada piscina hay un bordillo de baldosas blancas. En la figura aparecen dibujos de las tres piscinas más pequeñas que puede diseñar con baldosas azules en el interior y blancas para el bordillo.

utilizan distintas representaciones de las relaciones entre el número de baldosas de cada color y el número total de baldosas. De este modo, desde los primeros cursos, no solo aprenden los conceptos básicos del álgebra sino que también pueden desarrollar un conocimiento más profundo de aritmética.

Los libros de texto, las unidades didácticas y los vídeos sobre patrones que encontramos en internet suelen limitarse a pedir al estudiante que continúe la secuencia geométrica o que calcule los resultados en función de ciertos elementos de una serie y una fórmula. Estos enfoques no explotan de manera suficiente los patrones.

Las funciones en intervenciones de álgebra temprana

En la enseñanza temprana de matemáticas, el concepto de función puede enriquecer muchas actividades aritméticas, motivando a los estudiantes a generalizar y relacionar las tareas con ideas y conceptos abstractos. Por ejemplo, la multiplicación por 3 puede interpretarse como un mapeo, $n \rightarrow 3n$, que asocia un conjunto de valores de entrada a ciertos valores únicos de salida, en correspondencia con una notación funcional como $f(x) = 3x$ y a su forma gráfica en un plano cartesiano.

Finalmente, durante el transcurso de muchos años, los estudiantes serán capaces de trabajar con funciones, y con otros tipos de relaciones, dadas en forma de expresiones algebraicas. A partir de ellas podrán derivar nuevas expresiones.

Múltiples estudios sistemáticos realizados en Estados Unidos (e.g., Blanton, 2008; Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, & Newman-Owens, 2017; Brizuela, 2016; Brizuela et al., 2015; Cañadas et al., 2016; Carraher & Schliemann, 2007, 2016, 2018; Carraher et al., 2000, 2005, 2008; Martinez & Brizuela, 2006; Schliemann et al., 2007, 2012) se han centrado en el álgebra como el estudio

de funciones, relaciones y variación conjunta. Estos estudios ofrecen evidencia de que, a partir de los 6 años (primero de primaria), los estudiantes pueden empezar a explorar con éxito las funciones y sus representaciones.

En la investigación que realizamos en tres estudios longitudinales en escuelas con un alto porcentaje de estudiantes de origen afroamericano e hispanolatino, impartimos más de 100 lecciones en clases de segundo a quinto (Brizuela, 2016; Brizuela & Earnest, 2008; Brizuela & Schliemann, 2004; Carraher et al., 2008; Carraher & Schliemann, 2007, 2016, 2018; Carraher et al., 2000, 2005, 2006, 2008; Schliemann et al., 2001, 2007; Schliemann et al., 2012). Las lecciones de tercero a quinto (véase <http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/about.asp>) se centraban en las funciones y sus representaciones mediante el lenguaje natural, tablas de funciones, gráficos, y notación algebraica. Los estudiantes debatían, elaboraban generalizaciones y representaban diversos contextos y situaciones de problemas entre distintos conjuntos de cantidades físicas. A partir de sus propias representaciones, los estudiantes abordaron gradualmente el uso de líneas numéricas, tablas de datos, gráficos y letras para representar cantidades variables. Comentaron distintas representaciones de una misma situación y establecieron correspondencias entre ellas. La notación algebraica se introdujo previamente para ayudar a los estudiantes a expresar lo que ya habían aprendido sobre el problema. Con el tiempo, la notación les permitió extraer nueva información y conocimientos. También se les motivó a extraer conclusiones directamente de tablas, gráficos o expresiones algebraicas y, en último término, a producir y resolver ecuaciones utilizando procedimientos algebraicos.

Carraher et al. (2008) describen en detalle la ejecución de dos de nuestras lecciones: Las cajas de caramelos y el problema del monedero. Al comienzo de tercero (8–9 años), el problema sobre las cajas de caramelos presenta a los alumnos las variables y la covariación entre variables. El docente comienza mostrándoles dos cajas de caramelos y anuncia que (a) una caja pertenece a John y todos los caramelos de John están en esa caja, (b) que la otra caja pertenece a Mary y Mary tiene los caramelos que hay dentro de la caja más tres caramelos que están encima de la caja, y (c) que las dos cajas tienen exactamente el mismo número de caramelos dentro.

En las cuatro clases, 40 de los 63 estudiantes (63.4%) asignaron inicialmente números concretos a la cantidad de caramelos contenida dentro de las cajas.

Al llenar una tabla de posibles cantidades de caramelos en cada caja y de la cantidad de caramelos que John y Mary tienen cada uno, los estudiantes practicaban la suma y las operaciones inversas (al determinar cuántos caramelos tiene John a partir de los caramelos que tiene Mary, o la cantidad de caramelos en las cajas a partir de los caramelos que tendrían en total entre los dos). Las tablas de datos pueden considerarse pares ordenados de la relación entre las cantidades que tienen John y Mary.

Al final de cuarto, los mismos estudiantes representaron, analizaron y discutieron el problema del monedero, que podríamos describir como una comparación entre dos funciones, $w + 8$ y $3 \times w$. La lección comienza con los siguientes enunciados: (a) Mike tiene ocho dólares en la mano y tiene el resto de

su dinero en el monedero y (b) Robin tiene exactamente tres veces la cantidad de dinero que Mike tiene en el monedero. Los estudiantes tienen que representar la situación en el papel mediante dibujos o expresiones.

De los 63 estudiantes, 39 (61.9%) representaron el dinero de Mike y Robin utilizando una variable para representar la cantidad de dinero del monedero (49.2% utilizaron la notación con letras, tal como $w + 8$ o $3 \times w$, y 12.7% utilizó el dibujo de un monedero en lugar de una letra para representar la cantidad variable). Solo ocho estudiantes asignaron un valor específico a la cantidad de dinero del monedero. Estas representaciones reflejan el grado de integración por parte de los estudiantes de la sintaxis algebraica en su repertorio de herramientas matemáticas.

Los estudiantes llenaron tablas con posibles valores para el dinero de Mike y de Robin según distintos valores para w , la cantidad de dinero dentro del monedero. Al explorar sus propias tablas de valores posibles, los estudiantes se dieron cuenta de que: (a) Si en el monedero hubiese cuatro dólares, Mike y Robin tendrían la misma cantidad de dinero; (b) Mike tendría más dinero si en el monedero hubiese menos de cuatro dólares; y (c) Robin tendría más dinero que Mike si en el monedero hubiese más de cuatro dólares. Durante la discusión en clase, los estudiantes elaboraron dos gráficos, con la ayuda del docente, correspondientes al dinero de cada personaje como una función de la cantidad de dinero en el monedero y asociaron cada una de sus conclusiones con las regiones correspondientes en el plano euclíadiano.

Desde nuestra perspectiva, la ecuación $w + 8 = 3 \times w$ está tras el problema del monedero. En nuestra opinión, la ecuación abre la posibilidad de que exista un valor de w que produce el mismo valor para las dos funciones, lo que podríamos representar como $f(w) = w + 8$ y $g(w) = 3 \times w$. No afirmamos que los estudiantes de cuarto entendieron el problema en estos términos. A fin de cuentas, no estaban familiarizados con la notación de funciones en este formato, $f(x)$, ni siquiera, incluso, con el término ‘función’. No obstante, existe evidencia suficiente de que, de hecho, razonaban sobre una condición en la que dos funciones implícitas tienen el mismo valor. Los estudiantes demostraron claramente que las funciones, que describían como ‘el dinero de Mike’ y ‘el dinero de Robin’, covariaba.

En las lecciones siguientes, los estudiantes representaron otros problemas que incluían la comparación de dos funciones mediante una ecuación. En este contexto, en 5º curso se introdujo las reglas sintácticas del álgebra para la resolución de ecuaciones.

Las funciones y el aprendizaje en las intervenciones de álgebra temprana

En nuestro tercer estudio longitudinal, evaluamos la contribución de la intervención, que había durado tres años, en la comprensión matemática de los estudiantes (Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2012). Observamos que, al final de quinto, los estudiantes que habían participado en la intervención tenían un rendimiento significativamente mejor que el grupo de control en los 28 ítems de

evaluación correspondientes con la intervención (relacionados con la notación algebraica, gráficos, funciones y ecuaciones), y mostraron un rendimiento igual de bueno que el grupo de control en los 22 ítems no relacionados con la intervención. Los beneficios de la intervención persistían hasta dos y tres años más tarde, cuando las puntuaciones en los tests obligatorios que realizaron los estudiantes de la intervención se compararon con los del grupo de control.

Blanton, Stephens, et al., 2015 también han documentado la contribución de las funciones en las actividades de álgebra temprana al aprendizaje de los escolares de tercero. Los alumnos desarrollaron, ejecutaron y evaluaron los resultados de una intervención de un año de duración consistente en 19 lecciones de una hora de álgebra temprana en tercero, comparando las respuestas en la evaluación escrita de 39 estudiantes en la intervención con las de los 67 estudiantes en el mismo distrito que siguieron el programa habitual de matemáticas sin la intervención de álgebra temprana. La intervención se centró en la generalización, representaciones, justificaciones y razonamiento sobre las relaciones matemáticas (Blanton, Levi, Crites, & Dougherty, 2011; Kaput, 2008) e incluía ítems relacionados con el pensamiento funcional y las variables, así como con la equivalencia, expresiones, ecuaciones, desigualdades, aritmética generalizada y razonamiento proporcional. Los estudiantes en el grupo de intervención mostraron un rendimiento significativamente mejorado en la evaluación que los que siguieron el programa convencional. También representaron cantidades indeterminadas mediante la notación con variables de un modo que revelaba que su razonamiento alcanzaba más allá de los ejemplos particulares y tenían en cuenta generalizaciones en un amplio dominio de números, representando las relaciones funcionales entre cantidades covariables.

Brizuela y Lara-Roth (2002) vieron que los alumnos de segundo pueden aprender a utilizar satisfactoriamente representaciones de datos tabulares. Carraher, Martínez, y Schliemann (2008) demostraron cómo, a partir del trabajo con tablas, los alumnos de tercero utilizaban las propiedades aritméticas, exploraban y representaban, a su manera, la función $f(x) = 2x + 2$, e incluso discutían el significado de la expresión $y = 2x + 2$. Aquí las tablas sirvieron de herramientas para que los estudiantes comprendieran la equivalencia entre las expresiones utilizando las propiedades de las operaciones para reescribirlas. Y Blanton, Brizuela, et al. (2015), así como Cañadas, Brizuela, y Blanton (2016), observaron que los estudiantes de primero y segundo (entre seis y siete años) que participaron en un programa de enseñanza de ocho semanas, representaban situaciones utilizando tablas de funciones, reconocían relaciones funcionales y utilizaban la notación de variables.

El efecto de un programa de formación de profesorado centrado en las funciones en docentes y estudiantes

Basándonos en estudios sobre el pensamiento algebraico temprano, desarrollamos un programa intensivo de tres semestres de duración para docentes en activo, estructurado alrededor del papel central de las funciones en la

integración y exploración profunda de temas aislados en el currículum (véase Hotomski, Schliemann, Teixidor-i-Bigas, & Carraher, 2018; Schliemann, Carraher, & Teixidor-i-Bigas, 2013; y Teixidor-i-Bigas, Carraher, & Schliemann, 2013; <https://sites.tufts.edu/poincare/>). Los materiales y las actividades del curso fueron desarrollados conjuntamente por profesores de matemáticas, matemáticos y físicos. En cada curso, el contenido matemático y pedagógico (que tenía en cuenta los resultados de investigaciones sobre el aprendizaje y el pensamiento de los estudiantes) se entrelazaba. Cada capítulo semanal de texto, denominado ‘apuntes semanales’, había sido sometido previamente a exigentes rondas de edición y reescritura por parte del equipo interdisciplinar.

Los cursos se han ofertado, principalmente en línea, a profesores desde tercero hasta secundaria (15–16 años), con dos conjuntos de materiales (que abordan los mismos temas en distintos grados de profundidad), uno dirigido a maestros de primaria y otro para docentes de secundaria y bachillerato. Los materiales ponen de relieve variables, funciones y representaciones múltiples de objetos matemáticos para profundizar el conocimiento de las operaciones matemáticas, fracciones, proporciones, índices y la sintaxis y aritmética del álgebra. (Los materiales de los cursos están disponibles previa solicitud). Estos materiales cubren el funcionamiento de los algoritmos, ejemplifican las concepciones típicas de los estudiantes sobre ciertos temas matemáticos y consideran el uso de las matemáticas para modelar situaciones aplicadas. En general, incentivan que los estudiantes recurran al razonamiento espontáneo, generalizaciones y representaciones y a las discusiones sobre las relaciones entre conjuntos de cantidades físicas y números. Los docentes tienden a trabajar un mínimo de 10 horas semanales en las actividades del curso y publican con regularidad sus respuestas a las preguntas en línea. Durante la semana, reciben el *feedback* de los mentores del curso.

Durante los tres semestres del curso, que otorga créditos oficiales, los docentes discutieron el contenido matemático, resolvieron y debatieron problemas en grupos virtuales de aproximadamente ocho profesores y un instructor, examinaron y debatieron vídeos de investigaciones sobre el pensamiento algebraico temprano, entrevistaron a sus propios estudiantes, y planearon, ejecutaron y debatieron sus propias lecciones en grupos, típicamente de entre tres y cinco docentes de sus respectivos centros. Se les incentivaba a mejorar las lecciones que encontraban en los libros de textos y otras fuentes y a relacionar el contenido de las lecciones con variables, funciones y representaciones matemáticas convencionales.

Los docentes del cuarto cohorte del programa participaron directa o indirectamente en la enseñanza de matemáticas en primaria en un distrito en las afueras de Boston, en una zona con un nivel de ingresos bastante bajo, en la que el 18% de los estudiantes es de origen afroamericano y el 44% es de origen hispanolatino.

Veintidós profesores de tercero a quinto (34% de los 63 maestros de primaria de ese distrito) participaron en los cursos junto a otros siete participantes que

trabajaban como preparadores, interventores o educadores especiales. (En el programa también había 34 profesores de 5º de primaria al último curso de bachillerato).

Analizamos el porcentaje de estudiantes entre tercero y quinto que se clasificaban como ‘competentes’ (niveles 4 y 5) en las pruebas obligatorias del momento (PARCC, *Partnership for Assessment of Readiness for College and Careers*). Los datos incluidos en la [Tabla 2](#) permiten hacer comparaciones entre los porcentajes de estudiantes ‘competentes’ en 2015 (el año anterior al comienzo del programa de formación del profesorado) con los porcentajes correspondientes en 2016 (después de que los docentes completasen el segundo curso de los tres del programa).

La [Tabla 2](#) permite comparar los cambios en los resultados del distrito objetivo con los cambios de otros 10 distritos equiparados en resultados en 2015, y también en tamaño, ingresos de los padres, etnicidad, y otros aspectos demográficos. Tanto en el distrito objetivo como en los 10 distritos equiparados se aplicaban los estándares de la CCSSI.

Para cada nivel, el incremento en el porcentaje de estudiantes competentes en el distrito objetivo (última columna de la tabla) superaba el de los distritos equiparables. En el distrito objetivo, los incrementos oscilaron entre 8.44% y 12.24%, mientras que en los distritos equiparables oscilaban entre 2.28% y 6.62%.

En todo el estado, los cambios en el rendimiento de los alumnos eran menos esperanzadores; oscilaban entre -4.40% (empeoramiento) a 5.37%. En Boston, un distrito mucho más amplio con características demográficas similares pero con muchos más recursos financieros, el incremento era discreto, entre 2.05% y 3.58%. El distrito objetivo también mostró incrementos relativamente mayores entre 6º y 8º (véase Hotomski, Schliemann, & Carraher, [2018](#)).

En 2015 (año de referencia), los valores *z* de la diferencia en porcentajes de estudiantes competentes entre el distrito objetivo y los distritos equiparables no

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes competentes (Niveles PARCC L4 + L5).

	2015	2016	Incremento en %
Grado 3			
Distrito objetivo	42.77	51.21	8.44
Distritos equiparables	40.18	46.80	6.62
Diferencia entre distritos	2.59 (<i>NS</i>)	4.41 (<i>p</i> = .024)	
Grado 4			
Distrito objetivo	42.27	54.51	12.24
Distritos equiparables	38.10	40.38	2.28
Diferencia entre distritos	4.17 (<i>p</i> = .042)	14.13 (<i>p</i> = .0001)	
Grado 5			
Distrito objetivo	31.15	41.14	9.99
Distritos equiparables	32.80	36.52	3.72
Diferencia entre distritos	-1.65 (<i>NS</i>)	4.62 (<i>p</i> = .027)	

eran significativos entre tercero y quinto. Había una diferencia pequeña pero significativa, 4.17%, en cuarto, en favor del distrito objetivo. Por tanto, con una pequeña excepción, los distritos coincidían bastante. En 2016, los valores z indicaban que las diferencias entre el distrito objetivo y los distritos equiparables (de 4.41 a 14.13 puntos porcentuales en todos los cursos) eran todas significativas. El grupo de cuarto del distrito objetivo mostraba beneficios mucho mayores, casi 10% por encima de los grupos correspondientes en los distritos equiparables.

Estos resultados sugieren que el programa contribuyó a la competencia matemática de los estudiantes de tercero a quinto, en un distrito con mayoría de estudiantes de origen afroamericano y latinoamericano. Merece la pena señalar que el test se basaba en contenidos matemáticos generales coherentes con los estándares CCSSI para los cursos de tercero a quinto. No se prestó atención al conocimiento de los estudiantes sobre las variables o las funciones. Las medidas del impacto eran conservadoras, los resultados se basaban en el rendimiento de todos los estudiantes del distrito objetivo aunque solo aproximadamente un tercio de ellos había recibido instrucción por los docentes participantes en el programa. Por último, deberíamos reconocer que, aunque habíamos equiparado 10 distritos al distrito objetivo en relación con diversos criterios, el distrito objetivo no se seleccionó de manera aleatoria, por lo que el estudio no sigue un diseño experimental.

Consideraciones finales

Tanto los estándares del NCTM como los de la CCSSI reconocen la importancia de realizar actividades con patrones en el segmento inicial del itinerario de álgebra. Los estándares del NCTM también ponen de relieve los vínculos clave entre patrones, variables, funciones y relaciones; vínculos que recomienda que se exploren en profundidad antes de comenzar la educación secundaria.

Por otro lado, los estándares de la CCSSI recomiendan que se no introduzcan las funciones hasta el segundo curso de secundaria y que se introduzcan las variables, esencialmente como incógnitas, a partir de sexto curso. Creemos que estas recomendaciones reflejan limitaciones significativas. En primer lugar, es muy poco probable que la mayoría de los maestros de primaria exploren en profundidad patrones y secuencias con sus alumnos sin que estos tengan cierta idea de cómo vincular patrones con funciones y relaciones. Muchos profesores perderían la oportunidad de presentar a sus jóvenes estudiantes a la notación simbólica con letras para representar variables. Y los estudiantes de sexto perderían la oportunidad de aprender sobre variables sin restricciones.

La construcción de un itinerario de álgebra vertical satisfactorio requiere establecer vínculos entre distintos temas, unas conexiones que quizás sean demasiado complicadas para incluirse en los estándares. Por ejemplo, por sí solos, es posible que los docentes no consiguiesen apreciar la relación de una representación recursiva de una secuencia con el simple acto de ampliar la secuencia ni como esa representación va más allá. Muchos tampoco serían

capaces de apreciar las conexiones entre una progresión geométrica y una función lineal.

Estudios previos muestran que las expresiones algebraicas adquieren significado primero como representaciones de propiedades de distintas clases de números (el álgebra como aritmética generalizada) y como funciones y relaciones vinculadas con diversos contextos de problemas. En estas condiciones, los estudiantes de primaria podrían aprender a adoptar la notación algebraica mucho antes de lo que se creía, y a utilizar letras como marcadores de miembros arbitrarios de un dominio.

Diversos estudios, entre los que se incluyen estudios con niños de origen étnico diverso, en distritos de bajo nivel económico, han demostrado que los alumnos que reciben enseñanza de álgebra temprana tienen un rendimiento mejor que sus compañeros, tanto en las pruebas de razonamiento algebraico que requieren manejar generalizaciones matemáticas como en las pruebas matemáticas generales. Otros estudios han demostrado que los estudiantes (de nuevo, con la preparación necesaria) pueden empezar a utilizar con propiedad la notación algebraica convencional en los cursos inferiores. También existe evidencia de que, en tercero, los escolares pueden aprender a gestionar cantidades variables como funciones y descubrir que, para un valor particular de la variable de entrada, el valor de cada función, es decir, cada cantidad, será la misma. Esos datos anuncian ‘la resolución de una ecuación lineal de x ’. Aunque, en último término, los estudiantes tienen que aprender a resolver estos problemas mediante operaciones de ecuaciones dirigidas o justificadas sintácticamente, creemos que se pueden obtener muchos beneficios estableciendo una confianza inicial en la notación formal sobre la base de su utilidad para expresar relaciones entre cantidades y alcanzar nuevos conocimientos sobre ellas.

En todo caso, los resultados recomiendan que quienes participan en Educación Primaria, revisen el alcance y la profundidad de los conocimientos matemáticos que los jóvenes son capaces de adquirir cuando se les brindan oportunidades de apoyo.

Para fomentar el pensamiento algebraico en la Educación Primaria, los maestros tienen que desarrollar su experiencia sobre cómo ayudar a sus alumnos a llevar a cabo esa transición de sus propias representaciones de alguna manera implícitas a los tipos particulares de estructuras del lenguaje natural, diagramas geométricos y la propia notación algebraica. No es realista esperar que los docentes, abandonados a su suerte, logren avanzar en este camino sin una preparación considerable.

¿Cómo han de prepararse los matemáticos, profesores de matemáticas, diseñadores curriculares y diseñadores de políticas educativas para el camino que tienen por delante?

Hace una década, el National Council on Teacher Quality [NCTQ] llevó a cabo una evaluación a gran escala de la preparación de los maestros de primaria (Greenberg & Walsh, 2008). El Consejo descubrió que 18 de los 51 estados (35.3%) no presentaba ningún tipo de requisito o ningún requisito relacionado con áreas específicas de matemáticas. A menudo, entre los distintos

estados, los requisitos de los centros individuales no guardaban ninguna relación obvia con los requisitos oficiales a nivel estatal. El Consejo concluyó que pocos centros cubrían el contenido matemático que necesitan los maestros de primaria y que había una especial falta de atención al álgebra. El informe concluía: ‘El nuevo “común denominador” de nuestros programas de preparación de los maestros de Educación Primaria debe ser un conocimiento más profundo de las matemáticas básicas, con mayor atención a los fundamentos del álgebra’ (p. 59). Estamos de acuerdo.

La ejecución satisfactoria de un itinerario de pensamiento algebraico requiere programas de formación a largo plazo del profesorado que permitan integrar los contenidos matemáticos y una enseñanza que responda a la asimilación de los contenidos matemáticos por parte de los estudiantes. Algunos programas de corta duración no podrían cumplir estos objetivos (Ball et al., 2005; National Commission on Teaching and America’s Future, 1996).

Nuestra experiencia nos ha convencido de la importancia de una colaboración estrecha entre educadores, investigadores y científicos del ámbito matemático. Dadas las considerables discrepancias que perduran hasta hoy (Loveless, 2001) entre variedades extremas de constructivismo y movimientos extremos hacia el ‘regreso a lo básico’, es posible que exista un elemento considerable de conflicto en lo que promete ser un largo camino hacia la reconciliación.

En nuestra opinión, serán necesarias décadas de esfuerzo conjunto para poner en marcha un itinerario de álgebra de los seis a los 17 años a gran escala en Estados Unidos. El éxito de la iniciativa dependerá en gran medida de si las legislaciones estatales y las instituciones que ofrecen formación de profesorado introducen los cambios necesarios en los requisitos de certificación y la oferta de cursos. Podríamos desestimar muy fácilmente dicha perspectiva como poco realista y excesivamente onerosa, si no fuese porque sabemos que los jóvenes estudiantes, de diversas procedencias, son capaces de hacer frente a los desafíos si se les da la oportunidad.

Acknowledgements / Agradecimientos

Our work has been supported by the National Science Foundation grants 9772732, 9909591, 0310171, 0633915 and 0962863, to Tufts University and TERC. We thank the teachers and students we worked with and Bárbara Brizuela and Montserrat Teixidor-i-Bigas for their collaboration across projects. Opinions, conclusions and recommendations do not necessarily reflect NSF’s views. / Nuestro trabajo ha recibido el apoyo de los programas de la National Science Foundation 9772732, 9909591, 0310171, 0633915 and 0962863 a la Tufts University y TERC. Agradecemos a profesores y estudiantes su trabajo y a Bárbara Brizuela y Montserrat Teixidor-i-Bigas su colaboración en todos nuestros proyectos. Las opiniones, conclusiones y recomendaciones expresadas no reflejan necesariamente las de la National Science Foundation.

Disclosure statement

No potential conflict of interest was reported by the authors. / Los autores no han referido ningún potencial conflicto de interés en relación con este artículo.

Notas

1. El lector interesado puede comparar el uso de diagramas de tiras en Bodanski (op. cit.) del enfoque Davydov con los utilizados por Beckmann (2004) del enfoque matemático de Singapur.
2. Durante las discusiones en una fase inicial de nuestros estudios sobre el álgebra temprana, Bárbara Brizuela propuso la expresión ‘poner de relieve el carácter algebraico de la aritmética’ para describir nuestro trabajo conjunto.
3. En ciencia, se suelen buscar patrones en los datos con ‘ruido’. Estos casos no requieren que el patrón o modelo cuadre perfectamente con los datos. De hecho, no se espera en ningún caso un ‘ajuste’ perfecto. E incluso se podría utilizar una función como modelo de los datos cuya regla, ‘cada valor de entrada tiene un único valor de salida’ es transgredida. Aunque la ciencia ofrece importantes contextos para explorar los vínculos entre patrones y relaciones, no disponemos del espacio necesario para debatir estos temas en este artículo.
4. Algunos autores describen la variante no-recursiva como ‘funcional’ pero esto sugiere que el enfoque recursivo no es funcional. Las variantes recursivas y no recursivas son distintas representaciones de una función subyacente similar, en el sentido moderno de ‘el mismo conjunto de pares ordenados (entrada-salida)’. Decimos patrones ‘similares’ y no ‘el mismo’ patrón porque la forma recursiva podría tener un dominio y condominio distintos (e.g., los números naturales) de la forma no recursiva (números reales). Si los dominios y condominios son los mismos en los dos casos, entonces las definiciones recursiva y no recursiva describen exactamente la misma función.

References / Referencias

- Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic vs. algebra the core of a didactical dilemma. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 249–260). Dordrecht: Springer.
- Ball, D. L., Ferrini-Mundy, J., Kilpatrick, J., Milgram, R. J., Schmid, W., & Schaar, R. (2005). Reaching for common ground in K–12 mathematics education. *Notices of the AMS*, 52, 1055–1058.
- Beckmann, S. (2004). Solving algebra and other story problems with simple diagrams: A method demonstrated in grade 4–6 texts used in Singapore. *The Mathematics Educator*, 14, 42–46.
- Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. New York, NY: Pearson Education.
- Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds’ thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46, 511–558.
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children’s thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 181–202. Retrieved from <http://rdcu.be/osuZ>
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5. *Essential understanding series*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The development of children’s algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46, 39–87.

- Bodanskii, F. (1969/1991). The formation of an algebraic method of problem solving in primary school. In V. V. Davydov (Ed.), *Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (Vol. 6, pp. 275–338). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.
- Brizuela, B. (2016). Variables in elementary mathematics education. *The Elementary School Journal*, 117, 46–71.
- Brizuela, B., & Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 309–319.
- Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Murphy Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17, 34–63.
- Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understanding: The case of the “best deal” problem. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 373–402). Mahwah, NJ: Erlbaum & NCTM.
- Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 33–40.
- Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer.
- Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 97–103.
- Carpenter, T., & Levi, L. (1999). *Developing conceptions of algebraic reasoning in primary grades*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Montreal, Canada.
- Carraher, D. W., Martinez, M., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* (formerly *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*), 40, 3–22.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. In L. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 191–218). New York, NY: Taylor and Francis.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic reasoning. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-12- year-olds* (pp. 107–138). The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice. ICME-13 Monographs. Chaim: Springer International Publishing.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. (2000, October). *Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions*. [Medium format: CD] Plenary presentation at XXII Meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tucson, AZ.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. (2005). Treating operations as functions. In D. W. Carraher & R. Nemirovsky (Eds.), *Media and meaning*. [Medium format: CD]. *Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education*.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37, 87–115.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). Mahwah, NJ: Erlbaum & NCTM.

- CCSSI [Common Core State Standards Initiative]. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Retrieved from http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf.
- Davydov, V. V. (1969/1991). *Psychological abilities of primary school children in learning mathematics* (Vol. 6). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Dougherty, B. (2008). Measure up: A quantitative view of early algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 389–412). Mahwah, NJ: Erlbaum & NCTM.
- Earnest, D. (2014). Exploring functions in elementary school: Leveraging the representational context. In K. Karp (Ed.), *Annual perspectives in mathematics education: Using research to improve instruction* (pp. 171–179). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ferrara, F., & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 1–19.
- Ferrini-Mundy, J., Lappan, G., & Phillips, E. (1997). Experiences with patterning. *Teaching Children Mathematics*, 3, 282–289.
- Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of the quasi-variables. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, J. Cooper, & E. Warren (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol 1, pp. 258–264). Melbourne: The University of Melbourne. Retrieved from <https://minerva-access.unimelb.edu.au/handle/11343/35000>
- Gowers, T. (Ed.). (2008). *The Princeton companion to mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Greenberg, J., & Walsh, K. (2008). *No common denominator: The preparation of elementary teachers in mathematics by America's Education Schools*. [Mathematics advisory group: R. Askey, A. Chen, M. Goldenberg, R. Howe, J. Kamras, J. Milgram, R. Ramos & Y. Sagher] National Council on Teacher Quality. Retrieved from www.nctq.org
- Hobgood, K., & Kitchings, C. (2019). *Mathematical essay: Investigating figurate numbers with technology*. Retrieved from <http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Su11/Kitchings/CK6690/Figurate%20Numbers.html>
- Hotomski, M., Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Teixidor-i-Bigas, M. (2018). *Poincaré Institute: Impact on Mathematics Achievement of Ethnic Groups* (Unpublished research report). Tufts University, Medford, MA: The Poincaré Institute (retrieved 15 July 2012 from: <https://sites.tufts.edu/poincare/files/2018/07/Poicaré-Institute-Impact-on-Mathematics-Achievement-of-Ethnic-Groups.pdf>)
- Kaput, J. J. (1995). Long-term algebra reform: Democratizing access to big ideas. In B. LaCampagne, & Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium* (pp. 37–53). Washington, DC: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York, NY: NCTM & Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum & NCTM.
- Katz, V. J. (1995). The development of algebra and algebra education. In C. B. LaCampagne, W. Blair, & J. J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium* (Vol. 1, pp. 19–36). Washington, DC: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385436.pdf>

- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8, 139–151.
- Kieran, C. (Ed.). (2018). Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds. The global evolution of an emerging field of research and practice. In *ICME-13 monographs*, New York, NY: Chaim: Springer.
- Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20, 282–300.
- LaCampagne, C. B., Blair, W., & Kaput, J. J., (Eds.). (1995). *The algebra initiative colloquium: Vol 1: Plenary and reactor papers*. Washington, DC: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement. Vol 2: Working group papers ED385437.pdf Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385436.pdf>
- Loveless, T. (2001). A tale of two math reforms: The politics of the new math and the NCTM standards. In T. Loveless (Ed.), *The great curriculum debate: How should we teach reading and math* (pp. 184–209). Washington, DC: Brookings Institution.
- Martinez, M. V., & Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 285–298.
- National Commission on Teaching and America's Future (NCTAF). (1996). *What matters most: Teaching for America's future*. New York, NY: NCTAF. Retrieved from: <https://eric.ed.gov/?id=ED572506>
- National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: Author. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf
- NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Retrieved from <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Algebra/>
- NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: Author.
- NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] Algebra Working Group. (1995). *Algebra in the K–12 Curriculum: Dilemmas and Possibilities* (Final Report to the Board of Directors). East Lansing, MI: Michigan State University.
- Quine, W. V. (1987). *Quiddities: An intermittently philosophical dictionary*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (pp. 3–25). Chaim: Springer.
- Resnick, M. D. (1981). Mathematics as a science of patterns: Ontology and reference. *Noûs*, 15, 529–550. Special Issue on Philosophy of Mathematics. Retrieved from <https://www.jstor.org/stable/2214851>
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2001). When tables become function tables. In M. V. D. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 145–152). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2012). Algebra in elementary school. In L. Coulange, & J.-P. Drouhard (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives* (pp. 109–124). (Special Issue of *Recherches en Didactique des Mathématiques*). Grenoble: La Pensée Sauvage, Editions.

- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Teixidor-i-Bigas, M. (2013). *Teacher development and student learning*. Invited Presentation. 13th International Congress on Mathematical Education. Hamburg, Germany (July 25–30). Retrieved 17 May 2018 from: <https://sites.tufts.edu/poincare/files/2016/10/Schliemann-Carraher-Teixidor-2016-Teacher-Development-and-Student-Learning-JCME-13-1.pdf>.
- Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking. *ZDM*, 37, 16–22.
- Schoenfeld, A. (1995). Report of working group 1. In C. B. LaCampagne, W. Blair, & J. J. Kaput (Eds.), *The algebra initiative colloquium: Vol 2 ED385437.pdf#page=11* (pp. 11–18). Washington, DC: U.S. Department of Education, Office of Educational Research and Improvement.
- Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The Mathematics Teacher*, 81, 420–427.
- Schwartz, J., & Yerushalmi, M. (1992). Getting students to function in and with algebra. *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 25, 261–289.
- Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240, 611–616. doi:10.1126/science.240.4852.611
- Steen, L. A. (1990). Pattern. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 1–10). Mathematical Sciences Education Board & National Research Council. Washington, DC: National Academy Press.
- Teixidor-i-Bigas, M., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (2013). Integrating disciplinary perspectives: The Poincaré Institute for Mathematics Education. *The Mathematics Enthusiast*, 10, 519–562.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of algebra, K–12. 1988 Yearbook* (pp. 7–13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.